

Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen

Björn Hübner

**Institut für Statik
Technische Universität Braunschweig**

Bericht Nr. 2003-96



Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen

Vom Fachbereich Bauingenieurwesen
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Björn Christoph Hübner
aus Berlin

Eingereicht am

2. September 2002

Mündliche Prüfung am

7. Februar 2003

Berichter

Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm

Prüfer

Prof. Dr.-Ing. Udo Peil

Braunschweig 2003

ISBN 3-926031-32-8

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

© Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2003

Kurzfassung

Ein simultanes Lösungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen aus dem Bereich der Bauwerksaeroelastik wird vorgestellt. Die Modellierung der Tragwerksdynamik erfolgt mit der geometrisch nichtlinearen Elastizitätstheorie in total Lagrangescher Formulierung. Die Strömung wird mit den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben, und wenn Turbulenzeffekte maßgeblich sind, kommen die Reynolds-Gleichungen in Verbindung mit dem k - ω -Turbulenzmodell von Wilcox zum Einsatz. Die einheitliche Diskretisierung beider Felder mit der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode führt zu einem konsistenten Berechnungsmodell für das gekoppelte System. Da die isoparametrischen Raum-Zeit-Elemente ihre Geometrie in Zeitrichtung ändern können, erlaubt die Methode eine natürliche Beschreibung des infolge Strukturbewegungen zeitveränderlichen Strömungsgebiets. Die gewichtete Integralformulierung der Kopplungsbedingungen mit globalen Freiwerten für die Randspannungen sichert eine konservative Kopplung von Fluid und Struktur. Beispielhafte Untersuchungen aeroelastischer Instabilitäten von Brückenquerschnitten und selbsterregter Flatterschwingungen von eigengewichtsvorgespannten Membranen belegen, daß die simultane Lösung des streng gekoppelten Systems zu einem effizienten Berechnungsverfahren mit hoher Konvergenz und Genauigkeit der numerischen Lösung führt.

Abstract

A simultaneous solution procedure for fluid-structure interaction problems in the area of building aeroelasticity is presented. The structural motion is described by a geometrically nonlinear theory for elastic deformation behavior using a total Lagrangian approach. The flow field is modeled by the incompressible Navier-Stokes equations, which will be Reynolds averaged, if turbulence effects are essential. In this case, the k - ω turbulence model of Wilcox is used. The space-time finite element method is applied to both continua leading to a consistent discretization of fluid and structure. Since isoparametric space-time elements are adaptable in time direction, the method implies a natural description of the time dependent fluid domain, which has moving boundaries as a result of structural deformations. In order to enforce momentum conservation between both continua, a weighted residual formulation of coupling conditions is introduced using boundary tractions as additional variables. Numerical investigations of aeroelastic instabilities of bridge deck cross sections and flutter phenomena of gravity prestressed membranes demonstrate efficiency and versatility of the numerical scheme, which ensures high convergence and accuracy due to the simultaneous solution of the strongly coupled system.

»Wann treffen wir drei wieder zusamm?«
 »Um die siebente Stund, am Brückendamm.«
 »Am Mittelpfeiler.«
 »Ich lösche die Flamm.«
»Ich mit.«

 »Ich komme von Norden her.«
»Und ich von Süden.«
 »Und ich vom Meer.«

»Hei, das gibt einen Ringelreihn,
Und die Brücke muß in den Grund hinein.«

 »Und der Zug, der in die Brücke tritt
 Um die siebente Stund?«
 »Ei, der muß mit.«
»Muß mit.«

 »Tand, Tand,
Ist das Gebilde von Menschenhand!«

Theodor Fontane
Die Brück am Tay

Inhalt

1. Einleitung	1
1.1 Motivation und Zielsetzung	1
1.2 Modellbildung	2
1.3 Lösungsverfahren	4
1.3.1 Raum-Zeit-Finite-Element-Methode	5
1.3.2 Stabilisierte finite Elemente	7
2. Strukturdynamik im Zeitbereich	11
2.1 Einführung in die Strukturdynamik	11
2.2 Federnd gelagerter Starrkörper	12
2.2.1 Modellgleichungen des Starrkörpers	13
2.2.2 Zeitdiskontinuierliches Galerkin-Verfahren	14
2.2.3 Genauigkeit und Filtereigenschaften der Zeitintegration	16
2.2.4 Ablösung der Kraftgrößenfreiwerte	19
2.2.5 Einwirkungen auf dem Rand und im Gebiet	20
2.3 Geometrisch nichtlineare Elastodynamik	21
2.3.1 Kinematik	22
2.3.2 Spannungen	23
2.3.3 Erhaltungssätze der Mechanik in lokaler materieller Form	23
2.3.4 Konstitutive Gleichungen für linear elastisches Material	24
2.3.5 Rand- und Anfangsbedingungen	25
2.3.6 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Elastodynamik	26
2.3.7 Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente	27
2.3.8 Ansätze im Element	30
2.3.9 Iterative Lösung der diskretisierten Gleichungen	32
2.4 Verifikationsbeispiele zur Elastodynamik	34
2.4.1 Kragarm unter Biegung – Einfluß der Elementgeometrie	34
2.4.2 Stoßwelle im Dehnstab – Einfluß der Stabilisierung	35
2.4.3 Wellenausbreitung im berandeten elastischen Halbraum	39
2.4.4 Einachsig gespannte Membran unter Eigengewicht	41

3.	Strömungsmechanik inkompressibler viskoser Fluide	45
3.1	Einführung in die Strömungsmechanik	45
3.1.1	Charakterisierung von Strömungsvorgängen	45
3.1.2	Modellgleichungen für Strömungen	48
3.1.3	Modellierung turbulenter Strömungen	50
3.1.4	Strömungsmodelle in der Bauwerksaeroelastik	53
3.2	Reynolds-Gleichungen	55
3.2.1	Beschreibungsvariablen der Strömung	55
3.2.2	Lokale Form der Reynolds-Gleichungen	56
3.2.3	Lineare Wirbelviskositätsmodelle	58
3.2.4	Rand- und Anfangsbedingungen	59
3.2.5	Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung	60
3.2.6	Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente	62
3.2.7	Iterative Lösung ohne Turbulenzmodell	63
3.3	k - ω -Turbulenzmodell	64
3.3.1	Lokale Form der Modellgleichungen	65
3.3.2	Rand- und Anfangsbedingungen	67
3.3.3	Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung	69
3.3.4	Iterative Lösung der gekoppelten Modellgleichungen	70
3.4	Verifikationsbeispiele zur Strömungsmechanik	72
3.4.1	Laminare Zylinderumströmung – DFG-Benchmark	72
3.4.2	Turbulente Plattengrenzschicht	76
4.	Kopplung von Struktur und Fluid	81
4.1	Einführung	81
4.2	Lösungsstrategien für gekoppelte Systeme	83
4.2.1	Partitionierte Lösung mit schwacher Kopplung	83
4.2.2	Partitionierte Lösung mit starker Kopplung	85
4.2.3	Simultane Lösung	85
4.3	Kopplungsbedingungen	86
4.3.1	Lokale Form der Kopplungsbedingungen	87
4.3.2	Gewichtete Integralformulierung	88
4.4	Veränderliches Strömungsgebiet	90
4.4.1	Analogie zur ALE-Formulierung	90
4.4.2	Netzbewegung	91
4.5	Verifikationsbeispiel zur Kopplung	95

5. Aeroelastik von Brückenquerschnitten	99
5.1 Aufgabenstellung	99
5.2 Wirbelablösung an Brückenquerschnitten	101
5.3 Aeroelastik des H-Querschnitts	105
5.3.1 Einfluß der Anströmgeschwindigkeit	106
5.3.2 Phänomenologie der Selbsterregung	110
5.3.3 Aeroelastische Beiwerte für Flutteranalysen von Brücken . . .	112
6. Angeströmtes Membran-Hängedach	115
6.1 Aufgabenstellung	115
6.2 Gebäudeumströmung bei festgehaltenem Membrandach	116
6.3 Interaktion von Membranbewegung und Gebäudeumströmung	119
7. Zusammenfassung und Ausblick	123
7.1 Zusammenfassung	123
7.2 Ausblick	124
Summary	129
Literatur	135

1. Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Standortsicherheitsnachweise für Tragwerke des Bauwesens erfordern die Berücksichtigung aller Einwirkungen, die während der Lebensdauer der Bauwerke auftreten können. In vertikaler Richtung wirken in erster Linie Eigengewicht und Verkehrslasten. Beanspruchungen in horizontaler Richtung resultieren hauptsächlich aus Windwirkungen, die in vielen Fällen auch Bauwerksschwingungen hervorrufen können. Die deutsche Windlast-Norm [11] gilt jedoch nur für nicht schwingungsanfällige Bauwerke. Dynamische Windwirkungen werden teilweise in Fachnormen für spezielle Anwendungsgebiete, wie z. B. Antennentragwerke aus Stahl, berücksichtigt. Die neuere europäische Norm [13] „Einwirkungen auf Tragwerke – Windlasten“, die auch als Grundlage für die Neubearbeitung der nationalen Normung dient, geht dagegen auch auf verschiedene dynamische Windwirkungen ein, wobei man zwischen erzwungenen und selbsterregten Bauwerksschwingungen unterscheidet.

Hauptursachen für erzwungene bzw. fremderregte Schwingungen sind Böen infolge Windturbulenz sowie harmonische Wirbelablösungen an schlanken Bauwerken wie Antennen, Schornsteinen oder Türmen. Bei großen Verschiebungsamplituden wirbelerregter Schwingungen kann die Fremderregung auch in eine Selbsterregung übergehen und zum „Lock-In-Effekt“ führen, siehe z. B. [64, 70], bei dem sich die Wirbelablösefrequenz an die Eigenfrequenz des Tragwerks anpaßt. Selbsterregte Schwingungen, deren Ursache im Zusammenwirken von Bauwerksbewegung und Windströmung liegt, können zu schnell anwachsenden Amplituden und in der Folge zum Versagen des Tragwerks führen, wenn Wechselwirkungsphänomene eine Schwingungsanfachung bewirken.

Selbsterregte Bauwerksschwingungen wie Galloping, Brückenflattern oder Membranflattern, die zu den aeroelastischen Phänomenen gehören, können in der Norm nur mit konservativen Näherungsansätzen behandelt werden. Deren Anwendung bleibt auf solche Bauformen beschränkt, für die ausreichende, aus Windkanaluntersuchungen gewonnene Erkenntnisse über Anfachungsmechanismen und Stabilitätsgrenzen vorliegen. In allen anderen Fällen sind nach heutigem Stand der Technik umfangreiche Windkanalversuche mit elastischen Tragwerksmodellen erforderlich, da eine

genaue Bestimmung kritischer Windgeschwindigkeiten, oberhalb denen Selbsterregung einsetzt, nur unter Berücksichtigung der Interaktion von turbulenter Windströmung und nichtlinearer Tragwerksdynamik möglich ist. Hier können numerische Simulationen des gekoppelten Systems Windkanalversuche zumindest teilweise ersetzen und damit Entwicklungszeiten verkürzen und Kosten einsparen. Insbesondere wenn bei Entwurfsstudien und Formoptimierungen qualitative Aussagen im Vordergrund stehen und häufige Modellmodifikationen erforderlich sind, bieten sich numerische Berechnungsverfahren in idealer Weise an. Notwendige Voraussetzung für eine numerische Simulation ist die Formulierung eines Systems gekoppelter Modellgleichungen zur mathematischen Beschreibung der Interaktion von Tragwerksbewegung und Windströmung.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung, Implementierung und Anwendung eines einheitlichen Berechnungsmodells zur simultanen Lösung des Systems gekoppelter Modellgleichungen. Die Formulierung aller Gleichungen mit einheitlichen Beschreibungsvariablen und deren konsistente Raum-Zeit-Diskretisierung sowie die Aufstellung eines Gesamtgleichungssystems für das gekoppelte Systemverhalten bilden die Basis für das Berechnungsmodell. Die simultane Lösung besitzt gegenüber partitionierten Lösungsansätzen in vielen Fällen deutlich bessere Konvergenzeigenschaften, und die konsistente Diskretisierung mit gleichen Variablen erleichtert die angestrebte konservative Kopplung von Struktur und Fluid. Nichtkonservative Kopplungsformulierungen können zu falschen Stabilitätscharakteristiken führen und sind daher bei der Untersuchung aeroelastischer Phänomene zu vermeiden. Die gemeinsame Diskretisierung kann als Ausgangspunkt für mathematische Analysen des gekoppelten Systems dienen und ermöglicht die Anwendung von Reduktionsverfahren zur Beschreibung des Systemverhaltens mit wenigen generalisierten Freiheitsgraden.

1.2 Modellbildung

Numerische Simulationen von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen erfordern geeignete Modellgleichungen zur Beschreibung von Tragwerksdynamik, Windströmung und Kopplung beider Teilgebiete. Die Modellierung des Tragwerks erfolgt wahlweise als federnd gelagerter Starrkörper oder als elastischer Festkörper. Der das Bauwerk umströmende Wind wird als viskoses Fluid beschrieben. Die Kopplungsbedingungen sichern die Kontinuität der Erhaltungsgrößen zwischen den Teilsystemen.

Kapitel 2 beinhaltet die Formulierung und Diskretisierung der Bewegungsgleichungen der Tragwerksmodelle sowie die Lösung der Gleichungen für ausgewählte Anwendungsbeispiele. Zunächst behandelt Abschnitt 2.2 den als Mehr-Freiheitsgrad-System mit linearen Feder- und Dämpfungseigenschaften modellierten Starrkörper.

In Abschnitt 2.3 folgt die Beschreibung des physikalischen Verhaltens elastischer Festkörper mit der geometrisch nichtlinearen Elastizitätstheorie in total Lagrange-scher Formulierung. Mit der Einschränkung auf lineares Materialverhalten gelten die aus Impulsbilanz, Materialgesetz und Kinematik bestehenden Modellgleichungen für große Verschiebungen und Verdrehungen sowie kleine Verzerrungen.

Die in Kapitel 3 formulierten und diskretisierten Bestimmungsgleichungen für die Windströmung basieren auf der Modellierung des natürlichen Windes als inkompressibles viskoses Fluid, da Wirbelablösungen und Grenzschichteffekte das Strömungsverhalten entscheidend beeinflussen können, die Kompression bei üblichen Windgeschwindigkeiten jedoch vernachlässigbar ist. Die Beschreibung der Strömung erfolgt mit den Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Fluide bzw. den in Abschnitt 3.2 angegebenen Reynolds-Gleichungen, wenn bei hohen Reynolds-Zahlen Turbulenzeffekte das Strömungsverhalten maßgeblich bestimmen. Die durch zeitliche Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen entstehenden Reynolds-Gleichungen erfordern zusätzliche Modellannahmen zur Beschreibung der Turbulenz, um einen geschlossenen Gleichungssatz zu erhalten. Mit dem in Abschnitt 3.3 behandelten k - ω -Turbulenzmodell nach Wilcox [84] ist eine realistische Simulation verschiedener turbulenter Strömungssituationen bei vertretbarem numerischen Aufwand möglich. Die zusätzlichen Transportgleichungen für die beiden Turbulenzvariablen k und ω bilden zusammen mit den Reynolds-Gleichungen, die Massen- und Impulsbilanz formulieren, ein gekoppeltes System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen zur Beschreibung der Strömung.

Kapitel 4 stellt die zur Kopplung von Struktur und Fluid eingesetzten Strategien zusammen. In Abschnitt 4.2 wird die simultane Lösung der gekoppelten Modellgleichungen mit partitionierten Lösungsansätzen verglichen, um die Entscheidung für ein simultanes Lösungsverfahren mit der numerischen Effizienz und den hervorragenden Konvergenzeigenschaften zu begründen. Die Kopplungsbedingungen in Abschnitt 4.3 fordern die Kontinuität von Kraft- und Weggrößen zwischen den Teilsystemen und sichern in Verbindung mit den Modellgleichungen für Struktur und Fluid die Erhaltung von Masse, Impuls und mechanischer Energie im Gesamtsystem. Infolge der unterschiedlichen Betrachtungsweisen von Struktur und Fluid sind die Modellgleichungen der Strömung in einem zeitveränderlichen räumlichen Gebiet definiert, dessen Ränder sich an die Strukturbewegungen anpassen müssen, um die geometrische Kontinuität bei der Kopplung sicherzustellen, wogegen die Modellgleichungen der total Lagrangeschen Strukturformulierung auf der unverformten Referenzkonfiguration definiert sind. Die numerische Analyse der Strömung erfordert daher die Berücksichtigung des veränderlichen Strömungsgebiets. Der hierfür benötigte, auf Basis einer Pseudo-Struktur-Analyse des räumlichen Strömungsgebiets arbeitende Netzbewegungsalgorithmus ist in Abschnitt 4.4 beschrieben.

1.3 Lösungsverfahren

Geschlossene analytische Lösungen der Modellgleichungen existieren auch für die Teilsysteme nur in wenigen Ausnahmefällen, etwa bei eindimensionalen Aufgabenstellungen mit linearem Systemverhalten. Die meisten technisch interessanten Fälle dagegen führen zu nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, die auf beliebig berandeten Gebieten definiert sind und deren Lösung nur numerisch, unter Anwendung geeigneter Diskretisierungsverfahren möglich ist. Dabei wird der gesuchte räumliche und zeitliche Verlauf der Zustandsvariablen näherungsweise mit einer endlichen Anzahl von Freiwerten beschrieben, für die eine entsprechende Anzahl algebraischer Gleichungen zu formulieren ist.

In der nichtlinearen Strukturmechanik hat sich die Finite-Element-Methode als bevorzugtes Diskretisierungsverfahren durchgesetzt [5, 31, 87]. Bei linearen Modellgleichungen in Verbindung mit unendlich ausgedehnten Gebieten ist der Einsatz der Randelement-Methode besonders zu empfehlen [3]. Im Bereich der numerischen Strömungsmechanik, im Englischen „computational fluid dynamics“ (CFD) genannt, konkurrieren dagegen verschiedene Verfahren, die von Finite-Differenzen-Approximationen über Finite-Volumen-Verfahren bis zu Finite-Element-Methoden reichen, siehe [2, 16, 49, 87]. Daneben finden für spezielle Anwendungen auch Spektralverfahren mit Ganzfeldansätzen, Partikelmethode, die einzelne Strömungsteilchen verfolgen oder Gittergas-Methoden [43] auf Basis der Boltzmann-Gleichungen der kinetischen Gastheorie Verwendung.

So setzen Larsen und Walther [45, 83] im Bereich der Brückenaeroelastik z. B. die Diskrete-Wirbel-Methode – eine Variante der Partikelmethode – ein, um zweidimensionale Umströmungen von bewegten Brückenquerschnitten zu simulieren. Die Methode zur Diskretisierung der Wirbeltransportgleichungen reibungsbehafteter Strömungen beschreibt die laminare Bewegung einzelner Fluidelemente und Wirbel vom Rand des umströmten Körpers aus. Randintegrale sichern die Erfüllung der Randbedingungen und ermöglichen die Bestimmung der auf den Körper wirkenden Strömungskräfte. Der Einsatzbereich ist jedoch auf laminare Strömungen begrenzt, da die Verfolgung aller Wirbel turbulenter Strömungen nicht möglich ist und Turbulenzmodelle in Verbindung mit den Wirbeltransportgleichungen schwer zu formulieren sind. Auch ist eine konservative Kopplung mit den Bewegungsgleichungen elastischer Tragwerke aufgrund der unterschiedlichen Formulierung und Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen kaum möglich. Zudem erfordert eine Erweiterung auf drei Raumrichtungen die Auswertung von drei Wirbeltransportgleichungen anstatt einer Gleichung im zweidimensionalen Fall, womit die Methode ineffizient wird und im Hinblick auf eine möglichst vielseitig anwendbare und erweiterbare Formulierung wenig geeignet erscheint.

Für Aufgabenstellungen aus dem Windingenieurwesen mit Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen ist nach Hughes und Jansen [34] die Finite-Element-Methode besonders geeignet, da die einheitliche Diskretisierung von Struktur und Fluid eine ideale Voraussetzung für numerische Analysen der stark gekoppelten Systeme bietet. Für Analysen der nichtlinearen Tragwerksdynamik existiert keine wirkliche Alternative zur Finite-Element-Methode. Aber auch in der Strömungsmechanik weist die Methode bei komplexen Geometrien gegenüber dem Finite-Differenzen-Verfahren Vorteile auf. Im Vergleich mit Finite-Volumen-Verfahren ist kein Pauschalurteil möglich. Vielmehr hängen Genauigkeit und Effizienz beider Methoden in erster Linie von den eingesetzten Algorithmen wie Iterationsverfahren und Gleichungslösern ab.

Die Entwicklung eines ganzheitlichen Berechnungsmodells zur simultanen Lösung von Struktur und Fluid erfolgt daher auf Basis einer einheitlichen Finite-Element-Diskretisierung aller Modellgleichungen. Die Verwendung von finiten Elementen auch für die Zeitintegration führt zur Raum-Zeit-Finite-Element-Methode, die eine konsistente Diskretisierung der in einem Raum-Zeit-Gebiet definierten Modellgleichungen gewährleistet, wobei mit der zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Formulierung ein implizites, A-stabiles Zeitintegrationsverfahren höherer Ordnung zum Einsatz kommt. Zusätzlich verhindert eine Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente unphysikalische Oszillationen in der numerischen Lösung, wenn bei Wellenausbreitungsphänomenen oder konvektionsdominanten Strömungen der hyperbolische Charakter der Differentialgleichungen dominiert. Da Raum-Zeit-Formulierung und Stabilisierung grundlegend für die Diskretisierung der Modellgleichungen von elastischem Festkörper und viskosem Fluid sind, geben die folgenden Abschnitte kurze Einführungen in die beiden Gebiete, bevor in Kapitel 2 und 3 Strukturdynamik und Strömungsmechanik behandelt werden.

1.3.1 Raum-Zeit-Finite-Element-Methode

Die Anwendung der Finite-Element-Methode zur numerischen Lösung der in einem Raum-Zeit-Gebiet definierten Modellgleichungen führt auf eine einheitliche Diskretisierung von Anfangs-Randwertaufgaben in Raum und Zeit. Die von Hughes und Hulbert [33] auf die lineare Elastodynamik angewendete Methode ist insbesondere bei Wellenausbreitungsphänomenen vorteilhaft, wenn der hyperbolische Charakter der Differentialgleichungen vorherrscht und sich Informationen von einem Punkt des Raum-Zeit-Kontinuums entlang von Charakteristiken in Raum und Zeit ausbreiten. Im Gegensatz zu semidiskreten Formulierungen mit getrennten Näherungsoperatoren in Raum und Zeit ermöglicht die konsistente Raum-Zeit-Diskretisierung die Analyse des gesamten Diskretisierungsfehlers und die Entwicklung von Fehlerschätzern für numerische Lösungen instationärer Phänomene, siehe u. a. [33, 37].

Darauf aufbauend bietet die Methode die Möglichkeit das Raum-Zeit-Netz adaptiv zu verfeinern, da beliebig unstrukturierte Raum-Zeit-Netze zulässig sind, siehe Bild 1.1. Die Implementierung von Verfahren mit echter Raum-Zeit-Adaptivität ist allerdings sehr aufwendig und wird in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt. So erfordern räumlich dreidimensionale Modelle die adaptive Verfeinerung vierdimensionaler Netze.

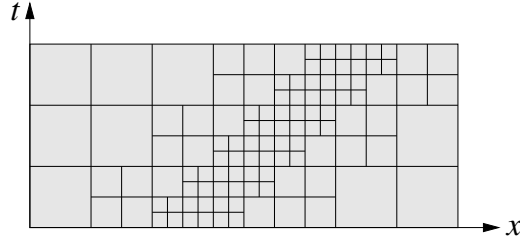


Bild 1.1: Adaptiv verfeinertes Raum-Zeit-Netz

Darüberhinaus ist die Raum-Zeit-Finite-Element-Methode besonders geeignet, um Modellgleichungen auf bewegten Netzen zu diskretisieren, siehe Hansbo [23] und Tezduyar et al. [75], wie sie bei Strömungen mit bewegten Rändern oder der umgeformten Lagrangeschen Formulierung dynamischer Feldgleichungen in der Momentankonfiguration auftreten. Somit bietet sich die Methode besonders zur Analyse von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen an, wenn der Rand des Strömungsgebiets den Strukturbewegungen folgen muß. Die isoparametrische Formulierung der Raum-Zeit-Elemente mit Formfunktionen $\phi_k(\xi, \tau)$ zur Beschreibung der Elementgeometrie

$$\begin{bmatrix} x(\xi, \tau) \\ t(\xi, \tau) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_K} \phi_k(\xi, \tau) \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{t}_k \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

in Raum und Zeit erlaubt die Verformung der Elemente in Zeitrichtung und führt auf eine natürliche Beschreibung zeitveränderlicher räumlicher Gebiete, siehe Bild 1.2. In Gleichung (1.1) ist N_K die Knotenanzahl im Element, ξ und τ sind lokale Elementkoordinaten in Raum und Zeit und \hat{x}_k und \hat{t}_k Knotenwerte der globalen Koordinaten. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Elementierung generell so, daß Anfangs- und Endzeit für alle Raumpunkte im Element gleich sind und die Richtungen der lokalen Raumkoordinaten orthogonal zur Richtung der globalen Zeitkoordinate verlaufen, womit die globale Zeitkoordinate $t(\tau)$ nur von der lokalen Zeitkoordinate abhängt.

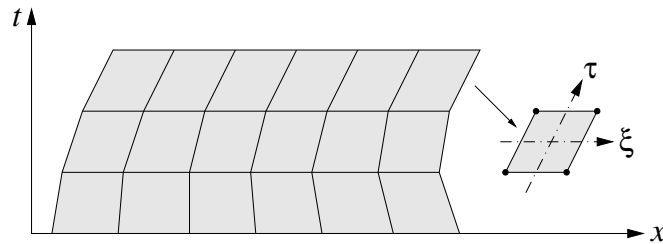


Bild 1.2: Mitbewegtes Raum-Zeit-Netz

In der klassischen Physik erfolgt der Informationsfluß bei instationären Phänomenen ausschließlich in positiver Zeitrichtung. Die Zukunft hat keinen Einfluß auf die Vergangenheit, aber umgekehrt beeinflusst die Vergangenheit die Zukunft. Daher wird das betrachtete Raum-Zeit-Kontinuum Q in eine Folge von Raum-Zeit-Scheiben $Q_n = \Omega_t \times I_n$ mit $I_n =]t_n, t_{n+1}[$ eingeteilt, in denen die Modellgleichungen nacheinander gelöst werden und die Lösung der aktuellen Zeitscheibe nur von den Zustandsgrößen der vorhergehenden Zeitscheibe abhängt. Zudem führt die in Bild 1.3 dargestellte Aufteilung des Kontinuums in Raum-Zeit-Scheiben zu einer effizienten numerischen Formulierung mit deutlich weniger Freiwerten im globalen Gleichungssystem.

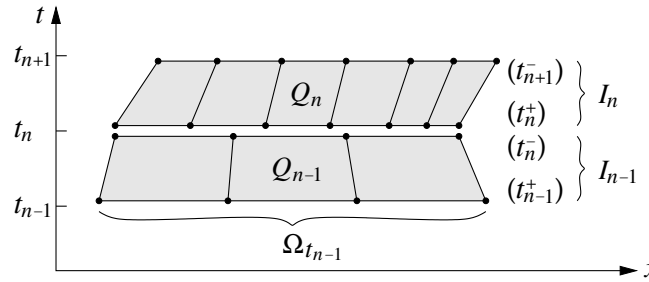


Bild 1.3: Raum-Zeit-Scheiben in der zeitdiskontinuierlichen Formulierung

Bei Anwendung des zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Verfahrens verlaufen die Ansätze für die Zustandsvariablen nur innerhalb der Raum-Zeit-Scheiben kontinuierlich. Zwischen den Zeitscheiben dürfen dagegen Diskontinuitäten auftreten. Die Formulierung erfordert zu den diskreten Zeitpunkten t_n unabhängige Freiwerte in aufeinanderfolgenden Zeitscheiben. Die in dieser Arbeit eingesetzte Elementierung der Raum-Zeit-Scheiben mit nur einem Element in Zeitrichtung verbunden mit linearen Ansätzen in der Zeit für alle Variablen führt auf ein implizites, A-stabiles Zeitintegrationsverfahren 3. Ordnung, siehe Johnson [37]. Bei adaptiver Netzverfeinerung im Raum oder wenn in mitbewegten Netzen entartete bzw. sich überdeckende Elemente eine Neuvernetzung erfordern, sind die räumlichen Netze am Übergang benachbarter Zeitscheiben nicht mehr deckungsgleich, siehe Bild 1.3. Das zeitdiskontinuierliche Galerkin-Verfahren ermöglicht in diesem Fall durch die integrale Formulierung der Übergangsbedingungen eine einfache Projektion der Lösung von der vorhergehenden auf die nachfolgende Zeitscheibe.

1.3.2 Stabilisierte finite Elemente

Die Anwendung der Standard-Galerkin-Finite-Element-Methode zur numerischen Lösung einer partiellen Differentialgleichung

$$\mathcal{L}(u) - f = 0 \quad \text{in } Q \quad (1.2)$$

mit dem Differentialoperator $\mathcal{L}(u)$ und dem Quellterm f führt auf die Bedingung

$$\int_{Q_n} \delta u (\mathcal{L}(u) - f) dQ = 0 \quad \forall \delta u, \quad (1.3)$$

wobei für den zu bestimmenden Verlauf der Zustandsvariable u ein Ansatz mit endlich vielen Freiwerten zu wählen ist. Damit führt die Auswertung von (1.3) i. d. R. nur zu einer Näherungslösung. Denn das im Fall der Standard-Galerkin-Formulierung mit den Ansatzfunktionen gewichtete Residuum der Differentialgleichung (1.2) muß nur im Integral über das Gebiet Q verschwinden. Folglich verschwindet das Residuum nicht in jedem Punkt, sondern nur im Sinne einer Mittelwertbildung über das Integrationsgebiet.

Die Aufteilung des Berechnungsgebiets in finite Elemente ermöglicht die Formulierung von Ansätzen, die aus elementweise möglichst einfachen Funktionen zusammengesetzt sind, sowie die Durchführung der Integration als Summe über alle Elementanteile. Die gewählten Finite-Element-Ansatzräume für die Zustandsvariablen sind endlichdimensionale Unterräume der vollständigen Lösungsräume, und nur in Ausnahmefällen enthalten die Unterräume auch die exakte Lösung. Aufgabe der Finite-Element-Formulierung ist es daher, unter allen möglichen Näherungslösungen diejenige zu bestimmen, die der exakten Lösung am nächsten kommt. Hierfür wird die Orthogonalität des Residuums bezüglich aller Wichtungsfunktionen gefordert. Die Wahl der Wichtungsfunktionen hat damit entscheidenden Einfluß auf die Bestimmung der Näherungslösung, und je nach Typ der zugrundeliegenden Differentialgleichung können unterschiedliche Wichtungsmethoden erforderlich sein.

Die Standard-Galerkin-Methode ist besonders zur Lösung elliptischer Differentialgleichungen mit geraden Ableitungsordnungen geeignet, bei denen die partielle Integration von (1.3) auf eine symmetrische Variationsformulierung führt, die gleichbedeutend mit der Forderung nach Stationarität des zugrundeliegenden Funktionals ist. Beispielhaft seien hier die Modellgleichungen der Elastostatik sowie die Laplace-Gleichung für stationäre Wärmeleitung, Diffusion oder Potentialströmung genannt.

Bei Wellenausbreitungsphänomenen oder konvektionsdominanten Strömungen existieren ausgezeichnete Richtungen, in denen sich Informationen ausbreiten, womit der hyperbolische Charakter der Differentialgleichungen dominiert. Die Anwendung des Standard-Galerkin-Verfahrens führt zu numerischen Oszillationen in der Lösung, da die Wichtungsfunktionen wie bei einer zentralen Differenzen-Approximation die Ausbreitungsrichtung nicht berücksichtigen, siehe z. B. [87]. Abhilfe können hier Petrov-Galerkin-Methoden schaffen, bei denen die Wichtungsfunktionen δu elementweise um Teile des Differentialoperators $\mathcal{L}(\delta u)$ erweitert werden. Besteht die Erweiterung aus dem konvektiven Term des Operators, so ist die Methode einer Upwind-

Differenzen-Approximation ähnlich und wird Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Verfahren (SUPG) genannt, siehe Brooks und Hughes [9]. In Bild 1.4 sind für den eindimensionalen Transport der Größe u mit der Geschwindigkeit v die Wichtungsfunktionen des SUPG-Verfahrens der Standard-Galerkin-Methode und dem Upwind-Differenzen-Ansatz gegenübergestellt. Das SUPG-Verfahren ist bei linearen Ansatzfunktionen weiterhin von zweiter Ordnung genau, die konstante Wichtung der vollständigen Upwind-Differenzen-Approximation führt dagegen nur auf ein Verfahren erster Ordnung.

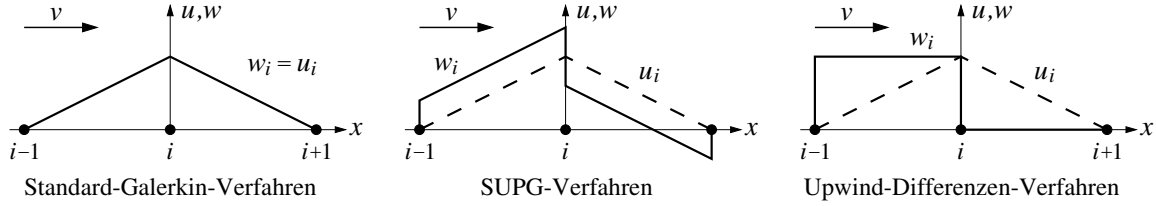


Bild 1.4: Eindimensionale Ansatzfunktionen u_i und Wichtungsfunktionen w_i

Eine um den Druckterm erweiterte Wichtung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen führt auf das Pressure-Stabilized-Petrov-Galerkin-Verfahren (PSPG), welches bei gemischten Finite-Element-Formulierungen die Stabilität der Lösung für beliebige Kombinationen von Ansatzordnungen gewährleistet, ohne daß der explizite Nachweis der Babuška-Brezzi-Bedingung erforderlich ist, siehe z. B. Tezduyar et al. [77]. Damit sind auch Ansätze gleicher Ordnung für Druck- und Geschwindigkeitsvariablen möglich. Wird die Wichtung um den gesamten Differentialoperator erweitert, folgt das Galerkin / Least-Squares-Verfahren (GLS)

$$\sum_e \int_{Q_n^e} (\delta u + \tau \mathcal{L}(\delta u)) (\mathcal{L}(u) - f) dQ = 0 \quad \forall \delta u, \quad (1.4)$$

das eine generalisierte, auf jeden Differentialoperator anwendbare Form der Stabilisierung darstellt und die zuvor genannten Verfahren mit einschließt, siehe Hughes et al. [32, 33]. Die Wahl des Stabilisierungsparameters τ kann die Genauigkeit der Lösung entscheidend beeinflussen. Nur im eindimensionalen Fall ist die Bestimmung eines optimalen Werts möglich, bei mehrdimensionalen Aufgaben kommt die Definition der Parameter nicht ganz ohne Heuristik aus. Ein neuer Ansatz von Tezduyar und Osawa [78] bestimmt Stabilisierungsparameter für die Konvektions-Diffusions-Gleichung und die Navier-Stokes-Gleichungen aus den Matrixnormen der verschiedenen Elementmatrixanteile.

2. Strukturdynamik im Zeitbereich

2.1 Einführung in die Strukturdynamik

Elastische Strukturen wie Tragwerke des Bauwesens oder Konstruktionen des Maschinen- und Fahrzeugbaus führen unter Einwirkung veränderlicher Lasten periodische oder transiente Schwingungen aus. Das Schwingungsverhalten ist abhängig von der Massenbelegung, der Steifigkeit und den Dämpfungseigenschaften der Struktur und kann mit den Methoden der Strukturdynamik analysiert werden. Umfassende Einführungen in die Bau- bzw. Strukturdynamik geben z. B. Petersen [55] oder Gasch und Knothe [17].

Ein reales, aus einem oder mehreren elastischen Festkörpern bestehendes System besitzt kontinuierlich verteilte Massen und Steifigkeiten. In vielen Fällen genügt aber die Betrachtung eines idealisierten Modells in Form eines Systems von Einzelmassen oder eines Einmassenschwingers. So können z. B. die Schwingungen einer weitgespannten Brücke infolge Windwirkung vereinfachend untersucht werden, wenn die Brückenstruktur durch einen federnd gelagerten Starrkörper von der Form des Brückenquerschnitts als ebenes System idealisiert wird, siehe Bild 2.1. Die Dämpfungseigenschaften können in Form viskoser Dämpfer oder bei Analysen im Frequenzbereich als modale Dämpfung Berücksichtigung finden.

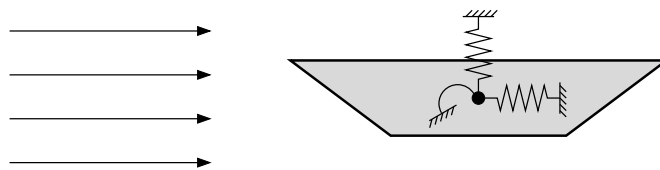


Bild 2.1: Brückenprofil im Wind

Die Trägheiten und Federsteifigkeiten des Ersatzsystems sind so zu wählen, daß sie mit der Massenbelegung des Brückenträgers und mit dem Verformungswiderstand in Feldmitte übereinstimmen. Wenn die Eigenschwingungen der gesamten Brücke bekannt sind, ist dagegen eine Anpassung des Ersatzsystems an die dem jeweiligen Freiheitsgrad zugeordnete niedrigste Eigenfrequenz vorteilhaft. Die Windwirkung kann durch Kraftbeiwerte für Widerstand, Auftrieb und Verdrehung oder durch Integration des Winddrucks über die Profiloberfläche berücksichtigt werden.

Erlaubt die Aufgabenstellung keine Idealisierung als System von Starrkörpern, wird die Struktur als elastisches Kontinuum modelliert und mit den Modellgleichungen der Elastodynamik beschrieben. Sind die auftretenden Strukturbewegungen nicht mehr klein gegenüber den Systemabmessungen, muß die Beschreibung der Kinetik mit einer geometrisch nichtlinearen Formulierung erfolgen. Zudem erfordern realitätsnahe Beschreibungen der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen, insbesondere bei großen Verzerrungen, die Verwendung nichtlinearer Materialgesetze. Große Verschiebungen einer kontinuierlich mit Masse und Steifigkeit belegten Struktur treten z. B. bei leichten Membrandachkonstruktionen auf, die infolge Wind zu Schwingungen mit erheblichen Amplituden angeregt werden können, siehe Bild 2.2.

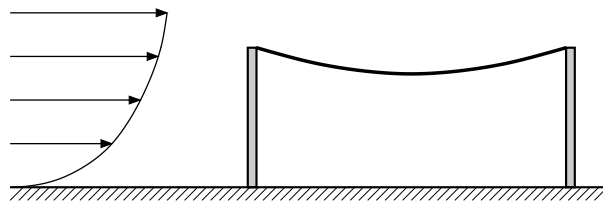


Bild 2.2: Membrandachkonstruktion im Wind

2.2 Federnd gelagerter Starrkörper

Ein dreidimensionaler Starrkörper besitzt sechs unabhängige Freiheitsgrade der Bewegung, drei Translationen und drei Rotationen. Im zweidimensionalen Fall verbleiben zwei Verschiebungen und eine Verdrehung. Vereinfachend wird im folgenden der zweidimensionale Fall unter Ausblendung der zweiten Translationsbewegung betrachtet. Der in Bild 2.3 dargestellte Starrkörper mit der Masse m und dem Massenträgheitsmoment θ ist in Richtung der Vertikalverschiebung u und der Verdrehung α mit jeweils einer Feder der Steifigkeit k_u bzw. k_α gelagert und wird durch die äußere, im Schwerpunkt angreifende Kraft $L(t)$ und das äußere Moment $M(t)$ angeregt. Dämpfungskräfte werden in dem Modell vernachlässigt.

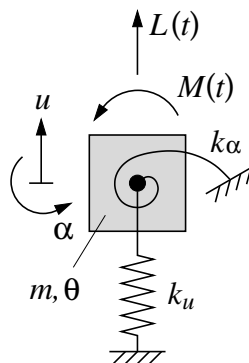


Bild 2.3: Systemskizze des federnd gelagerten Starrkörpers

2.2.1 Modellgleichungen des Starrkörpers

Die Freiheitsgrade u und α sowie die zugehörigen Geschwindigkeiten v und ω werden in den Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

angeordnet und die Massenträgheiten und Federsteifigkeiten in den Matrizen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_u \\ k_\alpha \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Die Zusammenfassung der äußeren Kraftgrößen sowie von Federkraft F_f und Federmoment M_f führt zum Lastvektor und zum Federkraftvektor

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} L(t) \\ M(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_f \\ M_f \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Die Modellgleichungen bilden ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung und bestehen aus den Bilanzgleichungen für Impuls und Drehimpuls

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{f} - \mathbf{p}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

die das Newtonsche Grundgesetz von der Proportionalität von Bewegungsänderung und einwirkender Kraftgröße ausdrücken, sowie dem Hookeschen Gesetz

$$\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{f}} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

zur Beschreibung linearer Federkräfte, das in einer Ratenformulierung angegeben wird. Darin sind die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \quad (2.6)$$

die zeitlichen Ableitungen von Verschiebung und Verdrehung. Die Lösung des Differentialgleichungssystem (2.4) und (2.5) im Zeitbereich erfordert die Festlegung der Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t=0$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}(0) = \mathbf{u}_a \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_a \quad (2.7)$$

für die Verschiebungs- oder Kraftgrößen und für die Geschwindigkeiten.

Primal unbekannte Größen sind Geschwindigkeiten \mathbf{v} und Kraftgrößen \mathbf{f} , wobei letztere, ohne das Ergebnis zu beeinflussen, durch Verschiebungsgrößen $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$ substituiert werden können. Die Wahl von Kraftgrößenvariablen führt aber auf eine zur Formulierung der Elastodynamik in Abschnitt 2.3 analoge Darstellung. Bei unabhängigen Einwirkungen $L(t)$ und $M(t)$ sind Translation und Rotation vollständig entkoppelt, da die Systemmatrizen \mathbf{M} und \mathbf{K} nur Hauptdiagonaleinträge enthalten.

2.2.2 Zeitdiskontinuierliches Galerkin-Verfahren

Die gewichtete Integralformulierung der Differentialgleichungen (2.4) und (2.5) mit den Anfangsbedingungen (2.7)

$$\begin{aligned} \int_I \mathbf{w}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{f} - \mathbf{p}) dt + \left[\mathbf{w}^T \mathbf{M} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) \right]_{t=0} \\ + \int_I \mathbf{g}^T (\mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{f}} - \mathbf{v}) dt + \left[\mathbf{g}^T (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} - \mathbf{u}_a) \right]_{t=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ist gleichwertig mit der differentiellen Form, wenn Gleichung (2.8) für beliebige Wichtungsfunktionen \mathbf{w} und \mathbf{g} erfüllt wird.

Zur Bestimmung von Näherungslösungen für die zeitlichen Verläufe der Zustandsvariablen wird der betrachtete Zeitbereich $I = \{t \mid 0 < t < T\}$ nach Einführung einer Sequenz diskreter Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T$ in eine Folge von Zeitintervallen $I_n = \{t \mid t_n < t < t_{n+1}\}$ eingeteilt, in denen Gleichung (2.8) nacheinander ausgewertet wird. Die Zustandsgrößen im Intervall I_n werden durch Ansätze

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{j=1}^{N_v} \phi_j(t) \hat{\mathbf{v}}_j, \quad \mathbf{f}(t) = \sum_{k=1}^{N_f} \phi_k(t) \hat{\mathbf{f}}_k, \quad t \in I_n \quad (2.9)$$

approximiert, die aus einer Linearkombination endlich vieler, linear unabhängiger Ansatzfunktionen ϕ bestehen. Diese kann man so wählen, daß die Freiwertevektoren $\hat{\mathbf{v}}_j$ und $\hat{\mathbf{f}}_k$ die Werte der Zustandsvariablen zu diskreten Zeitpunkten angeben. Die zeitlichen Ableitungen der Ansätze

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \sum_{j=1}^{N_v} \frac{d\phi_j}{dt} \hat{\mathbf{v}}_j, \quad \dot{\mathbf{f}}(t) = \sum_{k=1}^{N_f} \frac{d\phi_k}{dt} \hat{\mathbf{f}}_k \quad (2.10)$$

enthalten die abgeleiteten Ansatzfunktionen. Da jetzt noch $2N_v$ Geschwindigkeits- und $2N_f$ Kraftgrößenfreiwerte in jedem Intervall zu bestimmen sind, erfolgt die Auswertung der Integralgleichung (2.8) nur für $2N_v + 2N_f$ unabhängige Wichtungsfunktionen \mathbf{w} bzw. \mathbf{g} . Bei der Standard-Galerkin-Methode wählt man die Ansatzfunktionen ϕ als Wichtungsfunktionen, womit die Wichtung

$$\mathbf{w}(t) = \delta \mathbf{v}(t) = \sum_{j=1}^{N_v} \phi_j(t) \delta \hat{\mathbf{v}}_j, \quad \mathbf{g}(t) = \delta \mathbf{f}(t) = \sum_{k=1}^{N_f} \phi_k(t) \delta \hat{\mathbf{f}}_k \quad (2.11)$$

die erste Variation des Ansatzes ist. In (2.11) beschreiben die Variationen $\delta \mathbf{v}$ und $\delta \mathbf{f}$ partielle Ableitungen der Ansätze nach allen Freiwerten, so daß zu jedem Freiwert eine Wichtungsfunktion existiert. Die Ansätze für die Zustandsvariablen schränken

den Lösungsraum auf einen endlich dimensionalen Unterraum ein, womit die Lösung i. allg. nur eine Näherung ist. Für eine übersichtliche Darstellung der gewichteten Integralgleichungen wird hier auf eine Kennzeichnung der Näherung verzichtet.

In dieser Arbeit werden im Zeitbereich für alle Zustandsvariablen lineare Ansätze gewählt und mit den in Bild 2.4 dargestellten Ansatzfunktionen ϕ_1 und ϕ_2 formuliert.

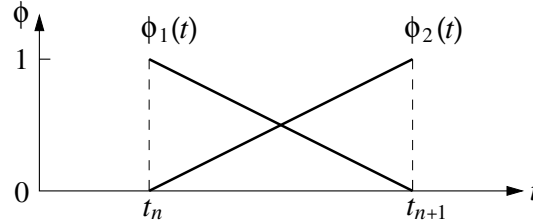


Bild 2.4: Ansatzfunktionen im Zeitintervall

Die Übergangsbedingungen zwischen benachbarten Zeitintervallen I_{n-1} und I_n

$$\mathbf{v}(t_n^+) = \mathbf{v}(t_n^-) \quad \text{und} \quad \mathbf{f}(t_n^+) = \mathbf{f}(t_n^-), \quad (2.12)$$

mit der abgekürzten Schreibweise

$$\mathbf{v}(t_n^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{v}(t_n + \varepsilon), \quad \mathbf{v}(t_n^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{v}(t_n - \varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \quad (2.13)$$

für die Zustandsvariablen an den Intervallrändern können von den Ansätzen (2.9) erfüllt werden, wenn jeweils ein Freiwert so festgelegt wird, daß die Zustandsgrößen am Anfang des Intervalls I_n mit denen am Ende des Intervalls I_{n-1} übereinstimmen und damit in jedem Ansatz ein Freiwert weniger zur Verfügung steht. Dieses Vorgehen führt zu kontinuierlichen Zeitverläufen und wird hier nicht weiter behandelt.

Bei einer Diskretisierung der Modellgleichungen mit dem zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Verfahren dürfen die Zeitverläufe der Zustandsvariablen, wie in Bild 2.5 gezeigt, an den Übergängen benachbarter Intervalle Sprünge aufweisen. Die Übergangsbedingungen (2.12) werden nicht von den Ansätzen erfüllt, sondern als Sprungterme in der Integralgleichung berücksichtigt und damit im Rahmen der gewählten Ansätze zusammen mit den Modellgleichungen im Intervall möglichst gut erfüllt.

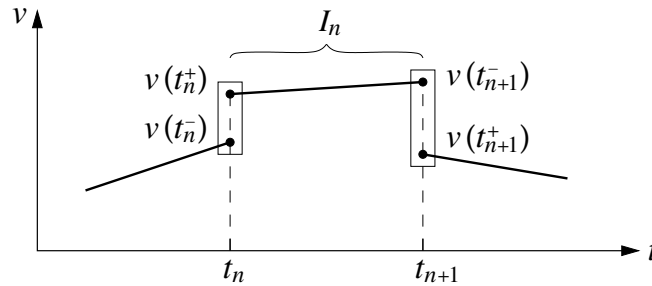


Bild 2.5: Zeitdiskontinuierlicher Ansatz

Die zeitdiskontinuierliche Galerkin-Formulierung der Modellgleichungen (2.4) und (2.5) im Zeitintervall I_n zur Bestimmung der Freiwerte des Ansatzes (2.9) lautet

$$\begin{aligned} \int_{I_n} \delta \mathbf{v}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{f} - \mathbf{p}) dt + \delta \mathbf{v}^T(t_n^+) \mathbf{M} (\mathbf{v}(t_n^+) - \mathbf{v}(t_n^-)) \\ + \int_{I_n} \delta \mathbf{f}^T (\mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{f}} - \mathbf{v}) dt + \delta \mathbf{f}^T(t_n^+) \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f}(t_n^+) - \mathbf{f}(t_n^-)) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

für alle $\delta \mathbf{v}$ und $\delta \mathbf{f}$. Die Lösung erfolgt nacheinander für alle Intervalle I_0, \dots, I_{N-1} und beginnt mit $\mathbf{v}(t_0^-) = \mathbf{v}_a$ und $\mathbf{f}(t_0^-) = \mathbf{K} \mathbf{u}_a$. Die beiden links stehenden Terme in (2.14) sind identisch mit der kontinuierlichen Galerkin-Formulierung der Impulsbilanz und des Hookeschen Gesetzes, während rechts die Sprungterme der diskontinuierlich formulierten Übergangsbedingungen für Geschwindigkeiten und Kraftgrößen stehen.

Die Vorzeichen der Sprungterme folgen der gedanklichen Aufteilung des zeitlichen Integrationsbereichs $[t_n^-, t_{n+1}^-]$ in die beiden Abschnitte $[t_n^-, t_n^+]$ und $]t_n^+, t_{n+1}^-]$, siehe Bild 2.5, für alle Terme der Galerkin-Formulierung, die Zeitableitungen der Zustandsvariablen \mathbf{v} und \mathbf{f} enthalten. Nur wenn die Sprungterme die passenden Vorzeichen besitzen, gelten die im folgenden Abschnitt beschriebenen Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften der zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Formulierung.

2.2.3 Genauigkeit und Filtereigenschaften der Zeitintegration

Das zeitdiskontinuierliche Galerkin-Verfahren mit linearen Ansätzen (ZDG-p1) führt bei Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit auf einen impliziten Zeitintegrationsalgorithmus, der A-stabil und von 3. Ordnung genau ist [37]. Damit ist der Algorithmus für alle Zeitschrittweiten $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ stabil. Bei linearen Ansätzen sind die Werte der Zustandsvariablen am Anfang und am Ende des Zeitintervalls I_n Freiwerte der Formulierung, so daß sich die Anzahl der Unbekannten gegenüber einem üblichen Einschrittalgorithmus, wie z. B. dem Euler-Rückwärts-Verfahren oder der Trapezregel, verdoppelt. Die Wahl konstanter Ansätze im Intervall reduziert die Anzahl der Freiwerte wieder auf die Hälfte und führt auf eine zum Euler-Rückwärts-Verfahren äquivalente Formulierung, die von erster Ordnung genau ist.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie die Bewegungsgleichungen der Strukturmechanik, können als System von Differentialgleichungen erster Ordnung entsprechend (2.4) und (2.5) geschrieben werden. Die Anwendung des ZDG-p1-Verfahrens auf beide Variablen des Differentialgleichungssystems führt zu der in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Zweifeldformulierung (ZDG-p1-p1), deren Eigenschaften in diesem Abschnitt untersucht und mit dem Standard-Newmark-Verfahren, also der Methode der konstanten mittleren Beschleunigung, verglichen werden. Weitergehende Ver-

gleiche verschiedener ZDG-Formulierungen, auch bei zusätzlicher Galerkin / Least-Squares-Stabilisierung, führt Hulbert in [36] durch.

Im folgenden werden die freien, ungedämpften Schwingungen eines Einfreiheitsgradsystems betrachtet, die mit den Differentialgleichungen

$$\dot{v} + \omega^2 u = 0, \quad v = \dot{u} \quad (2.15)$$

beschrieben werden, worin ω die Eigenkreisfrequenz ist. In Bild 2.6 sind die mit dem ZDG-p1-p1- und dem Newmark-Verfahren ($\alpha = 1/4$ und $\delta = 1/2$) bestimmten Zeitverläufe der Verschiebung u und der Geschwindigkeit v für $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ gegenübergestellt. Anfangsbedingungen sind $u(0) = 1 \text{ m}$ und $v(0) = 0 \text{ m/s}$. Die Zeitschrittweite beträgt $\Delta t = T/10$, wobei $T = 2\pi/\omega = 2\pi \text{ s}$ die Periodendauer der Schwingung ist.

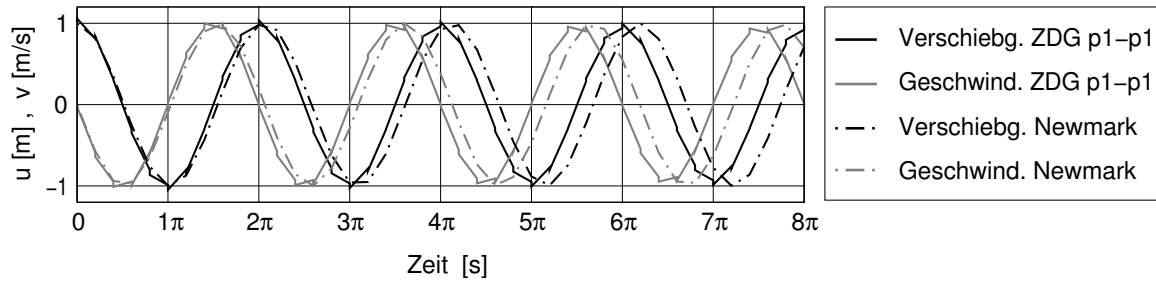


Bild 2.6: Verschiebungs- und Geschwindigkeitsverlauf für $\Delta t/T = 1/10$

Die Verläufe des ZDG-Verfahrens weisen an den Übergängen zwischen benachbarten Intervallen deutliche Sprünge auf, die mit abnehmender Schrittweite kleiner werden. Die Phasenverschiebung ist sehr gering, aber die Amplituden nehmen infolge numerischer Dämpfung leicht ab. Die Näherungslösung des Newmark-Verfahrens ist deutlich phasenverschoben, zeigt jedoch keinen Amplitudenabfall.

Um die Eigenschaften von Einschrittverfahren genauer zu untersuchen, kann die Rechenvorschrift zur Bestimmung der Zustandsgrößen eines Zeitschritts aus den Größen des vorhergehenden Zeitschritts mit der Übertragungsmatrix \mathbf{A} in der Form

$$\begin{bmatrix} u(t_{n+1}^-) \\ \Delta t v(t_{n+1}^-) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u(t_n^-) \\ \Delta t v(t_n^-) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

angegeben werden. Der spektrale Radius der Übertragungsmatrix

$$\rho(\mathbf{A}) = \max \{ |\lambda_1(\mathbf{A})|, |\lambda_2(\mathbf{A})| \} \quad (2.17)$$

wird aus den Eigenwerten λ_i von \mathbf{A} bestimmt und ist abhängig vom Verhältnis $\Delta t/T$. Für $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$ ist der Algorithmus stabil, bei $\rho(\mathbf{A}) = 1$ tritt keine numerische Dämpfung auf, und bei $\rho(\mathbf{A}) = 0$ werden Schwingungen im zugehörigen Frequenzbereich

vollständig herausgefiltert. Die Eigenwerte der Übertragungsmatrizen der untersuchten Verfahren sind konjugiert-komplex und haben die Form

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{A}) = A \pm iB, \quad (2.18)$$

womit die durch (2.16) definierte Näherungslösung nach [36] die Gestalt

$$u(t_n^-) = e^{-\bar{\xi}\bar{\omega}t_n} (c_1 \cos(\bar{\omega}t_n) + c_2 \sin(\bar{\omega}t_n)) \quad (2.19)$$

mit der angenäherten Eigenkreisfrequenz

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\Delta t} \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad (2.20)$$

und dem numerischen Dämpfungsmaß

$$\bar{\xi} = -\frac{\ln \rho}{\Delta t \bar{\omega}} \quad (2.21)$$

annimmt. Die Koeffizienten c_1 und c_2 sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Das numerische Dämpfungsmaß beschreibt den Amplitudenabfall und ist ein Maß für die numerische Dissipation. Der relative Periodenfehler $(\bar{T} - T)/T$ beschreibt die Phasenverschiebung und ist ein Maß für die numerische Dispersion. Die angenäherte Periodendauer $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$ folgt aus der angenäherten Eigenkreisfrequenz.

Im linken Diagramm von Bild 2.7 sind die spektralen Radien der untersuchten Verfahren für das lineare Ein-Freiheitsgrad-System nach (2.15) über dem Verhältnis $\Delta t/T$ aufgetragen.

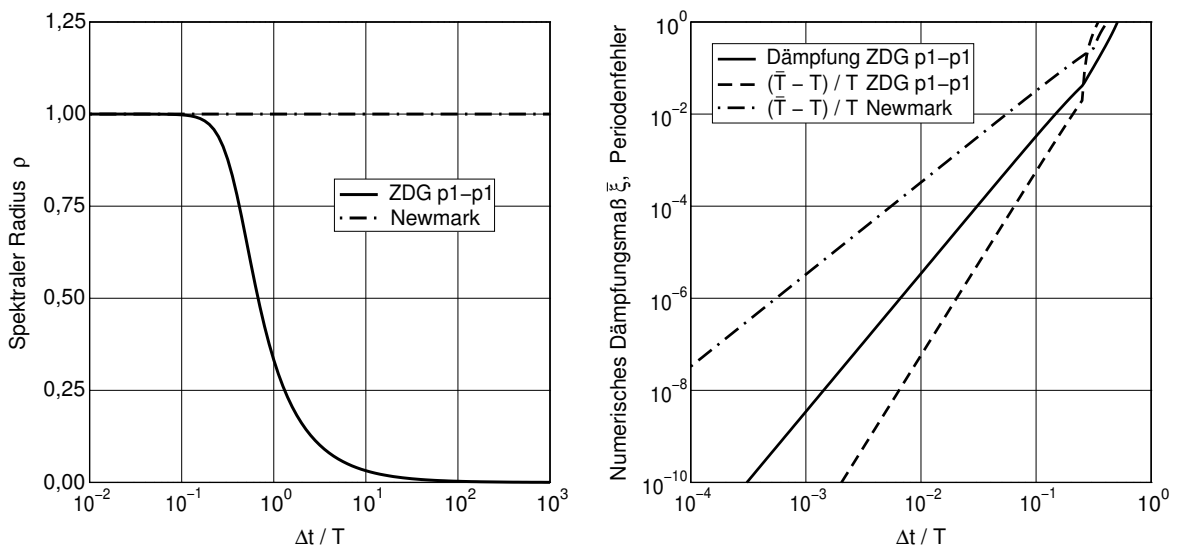


Bild 2.7: Filtereigenschaften und Genauigkeit der Zeitintegration

Das ZDG-p1-p1-Verfahren ist unbedingt stabil, da für alle Zeitschrittweiten Δt die Bedingung $\rho < 1$ gilt. Für das Newmark-Verfahren gilt unabhängig von der Zeitschrittweite $\rho = 1$, womit das Verfahren grenzstabil ist und alle Schwingungen ungedämpft überträgt, auch bei $\Delta t/T > 1/4$, wenn die zeitliche Diskretisierung eine Auflösung nicht mehr zuläßt. Damit können hochfrequente Störungen in der Systemantwort die Übertragung der niederfrequenten Anteile verfälschen. Die ZDG-p1-p1-Methode überträgt gut aufgelöste niederfrequente Schwingungen mit $\Delta t/T < 1/10$ fast ungedämpft. Hochfrequente Anteile dagegen, die auch eine Folge des räumlichen Diskretisierungsverfahrens sein können, werden zunehmend herausgefiltert, für $\Delta t/T > 100$ idealerweise in einem Zeitschritt.

Zur Beurteilung der Genauigkeit einer Zeitintegrationsmethode muß die numerische Dissipation und Dispersion untersucht werden, da sich der Gesamtfehler einer Näherungslösung aus Amplituden- und Periodenfehler zusammensetzt. Im physikalisch interessanten unteren Frequenzbereich wird der Amplitudenfehler mit dem numerischen Dämpfungsmaß $\bar{\xi}$ beschrieben, das beim Newmark-Verfahren im gesamten Frequenzbereich null ist und die Konservativität der Methode widerspiegelt. Der Amplitudenfehler des ZDG-p1-p1-Verfahrens nimmt, wie im rechten Diagramm von Bild 2.7 dargestellt, mit kleiner werdendem Zeitschritt kubisch ab, der Periodenfehler sogar mit 4. Ordnung. Damit ist das ZDG-p1-p1-Verfahren von 3. Ordnung genau, wobei die Periodendauer eine Ordnung genauer approximiert wird. Der Newmark-Algorithmus ist trotz exakter Übertragung der Amplitude nur von 2. Ordnung genau, da der Periodenfehler bei abnehmender Schrittweite quadratisch abnimmt. Die günstigen Filtereigenschaften, die hohe Genauigkeit bei unbedingter Stabilität und eine konsistente Raum-Zeit-Diskretisierung sind die Vorteile der zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Formulierung, die mit erhöhtem numerischen Aufwand erkauft werden.

2.2.4 Ablösung der Kraftgrößenfreiwerte

Wird die Integralformulierung (2.14) mit den gewählten Ansätzen (2.9) und (2.10) für alle Wichtungsfunktionen nach (2.11) ausgewertet, entsteht ein System diskreter Bestimmungsgleichungen für die Zustandsgrößen im Intervall I_n . Die Anordnung der Freiwerte $\hat{\mathbf{v}}_j$ und $\hat{\mathbf{f}}_k$ in Spaltenvektoren $\hat{\mathbf{v}}$ und $\hat{\mathbf{f}}$ führt auf die Matrix-Vektor-Schreibweise der Bestimmungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}} & \hat{\mathbf{H}} \\ -\hat{\mathbf{H}}^T & \hat{\mathbf{F}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_n \\ \hat{\mathbf{f}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{v}}_{n-1} \\ \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{f}}_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Die Bestimmung der Matrizen $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{Q}}$ und des Lastvektors $\hat{\mathbf{p}}$ erfolgt durch Integration bzw. Auswertung der Ansätze im Intervall. Das Gleichungssystem (2.22)

ist auch bei Multiplikation der zweiten Gleichung mit -1 nicht symmetrisch, da die Matrizen $\hat{\mathbf{M}}$ und $\hat{\mathbf{F}}$ wegen der unterschiedlichen Ableitungsordnungen von Ansatz und Wichtung unsymmetrisch sind.

Die Ablösung der Kraftgrößenfreiwerte im Gleichungssystem (2.22) führt zu einer Formulierung nur in Geschwindigkeitsvariablen, die sich insbesondere anbietet, wenn der Starrkörper Teil einer Mehrfeld-Aufgabe ist und die Impulsbilanz mit weiteren Teilsystemen gekoppelt ist. Die nach den Kraftgrößenfreiwerten aufgelöste zweite Gleichung von (2.22)

$$\hat{\mathbf{f}}_n = \hat{\mathbf{F}}^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{v}}_n + \hat{\mathbf{F}}^{-1} \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{f}}_{n-1} \quad (2.23)$$

wird in die erste eingesetzt. Im Gesamtgleichungssystem der gekoppelten Aufgabenstellung tritt nur die Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeitsfreiwerte

$$\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{v}}_n = \hat{\mathbf{b}} \quad (2.24)$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{F}}^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T \quad (2.25)$$

und der rechten Seite

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{v}}_{n-1} - \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{F}}^{-1} \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{f}}_{n-1} \quad (2.26)$$

auf. Die Bestimmung der Kraftgrößen, die in den Sprungtermen des folgenden Zeitintervalls auftreten, erfolgt anschließend durch Auswertung von Gleichung (2.23).

2.2.5 Einwirkungen auf dem Rand und im Gebiet

Ein zusammenhängender dreidimensionaler Starrkörper der Dichte ρ besteht aus dem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Der Starrkörper ist in seinem Schwerpunkt bezüglich aller Freiheitsgrade federnd gelagert. Auf dem Rand werden z. B. durch Windwirkung hervorgerufene, zeitveränderliche Randspannungen \mathbf{h} eingeprägt. Im Gebiet wirkt infolge eines Gravitationsfeldes die konstante massenbezogene Beschleunigung \mathbf{b} .

Die Integration der Spannungen über den Rand und des Eigengewichts $\rho\mathbf{b}$ über das Gebiet führt zu dem resultierenden Kraftvektor

$$\mathbf{p}_F(t) = \int_{\Gamma} \mathbf{h}(t) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} d\Omega \quad (2.27)$$

und zu dem auf den Schwerpunkt \mathbf{x}_s bezogenen Momentenvektor

$$\mathbf{p}_M(t) = \int_{\Gamma} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \times \mathbf{h}(t) \, d\Gamma, \quad (2.28)$$

wobei \mathbf{x} der Ortsvektor ist. Wenn der Bezugspunkt der Schwerpunkt ist, verschwindet das resultierende Moment des Eigengewichts. Die mit (2.27) und (2.28) bestimmten Kräfte und Momente werden entsprechend (2.3) zu einem Lastvektor mit sechs Komponenten zusammengefaßt. Die Lösung der Bewegungsgleichungen des Starrkörpers (2.4) und (2.5) erfolgt dann für alle sechs Freiheitsgrade. Bei einer endlichen Starrkörperrotation ändert sich der Hebelarm $\mathbf{x} - \mathbf{x}_s$ in (2.28), so daß die Koordinaten der Randpunkte neu bestimmt werden müssen. Hierzu wird der Starrkörpertrand als Polyeder beschrieben und die Kinematik der Eckpunkte in Abhängigkeit von den Bewegungsgrößen des Schwerpunkts formuliert.

2.3 Geometrisch nichtlineare Elastodynamik

Die Modellgleichungen der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik beschreiben Bewegungen und mechanische Beanspruchungen dreidimensionaler elastischer Festkörper bei endlich großen Verschiebungen und Verdrehungen. Bei Festkörpern konstanter Dicke können die Modellgleichungen in einem zweidimensionalen Gebiet formuliert werden, wenn in Dickenrichtung keine Beanspruchungen (ebener Spannungszustand) oder keine Verformungen (ebener Verzerrungszustand) auftreten. Eine umfassende Darstellung der Elastizitätstheorie einschließlich Definition verwendeter Begriffe und Herleitung aller Modellgleichungen geben Stein und Barthold in [71].

Die materielle Betrachtungsweise des Festkörpers führt auf die Lagrangesche Methode zur Formulierung der Bewegungsgleichungen. Die Bewegungsgrößen gelten für materielle Punkte, d. h. sich bewegende Teilchen des Festkörpers, an denen ggf. weitere Zustandsvariablen definiert sind. Die Identifikation der Teilchen und die Definition der Materialkennwerte erfolgt in der durch den Zeitpunkt $t = 0$ festgelegten Referenzkonfiguration des Körpers, die aus dem offenen Gebiet $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ und dem Rand $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ besteht. In der hier verwendeten total Lagrangeschen Formulierung werden alle Zustandsgrößen und Differentialoperatoren auf die mit dem Index 0 gekennzeichnete unveränderliche Referenzkonfiguration bezogen.

Die folgende Darstellung beschränkt sich auf lineares Materialverhalten, womit die Formulierung für elastische Festkörper bei kleinen Verzerrungen gilt. Große Verzerrungen, aber auch zeitabhängiges oder inelastisches Materialverhalten erfordern die Erweiterung des Modells um eine physikalisch nichtlineare Theorie zur realistischen Beschreibung der Spannungs-Verformungs-Beziehungen.

2.3.1 Kinematik

Die Kinematik beschreibt den Verschiebungs-, Verdrehungs- und Verzerrungszustand des Festkörpers. Die Identifikation materieller Punkte erfolgt durch die Ortsvektoren \mathbf{x}_0 der Referenzkonfiguration. Der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad (2.29)$$

eines materiellen Punktes ist die Differenz der Ortsvektoren der Momentan- und der Referenzkonfiguration. Der materielle Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \text{grad}_0 \mathbf{x} = \mathbf{I} + \text{grad}_0 \mathbf{u} \quad (2.30)$$

beschreibt die Deformation in der Umgebung eines Teilchens und ist als Abbildung des Linienelements $d\mathbf{x}_0$ in der Referenzkonfiguration auf das Linienelement $d\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration definiert. Darin ist \mathbf{I} der Identitätstensor und grad_0 der Gradientenoperator bezüglich der materiellen Koordinaten \mathbf{x}_0 . Der materielle Deformationsgradient nimmt bei Starrkörperbewegungen einen Wert ungleich null an, ist richtungsabhängig und unsymmetrisch und daher zur Formulierung von Materialgesetzen ungeeignet. Dagegen ist der Greensche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \mathbf{u} + (\text{grad}_0 \mathbf{u})^T + (\text{grad}_0 \mathbf{u})^T \text{grad}_0 \mathbf{u}) \quad (2.31)$$

ein symmetrisches und richtungsunabhängiges Verzerrungsmaß, das bei Starrkörperrotationen und -translationen verschwindet und für die Formulierung von Materialgesetzen in der Referenzkonfiguration gut geeignet ist.

Die materielle Zeitableitung $\dot{\Psi}$ beschreibt die zeitliche Änderung der Zustandsgröße Ψ eines sich bewegenden materiellen Punktes. Bei der materiellen Darstellung von Zustandsgrößen in der Lagrangeschen Betrachtungsweise verfolgt man den zeitlichen Verlauf der Zustandsgrößen von materiellen Punkten, womit die materielle Zeitableitung einer Zustandsgröße der partiellen Ableitung nach der Zeit entspricht. Die materielle Zeitableitung des Ortsvektors führt zum Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.32)$$

der den aktuellen Bewegungszustand eines materiellen Punktes beschreibt. Der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\text{grad}_0 \mathbf{v} + (\text{grad}_0 \mathbf{v})^T + (\text{grad}_0 \mathbf{u})^T \text{grad}_0 \mathbf{v} + (\text{grad}_0 \mathbf{v})^T \text{grad}_0 \mathbf{u}) \quad (2.33)$$

gibt die zeitliche Änderung des Greenschen Verzerrungstensors (2.31) an und besteht wie dieser aus einem linearen und einem nichtlinearen Anteil. Der lineare Teil ist nur vom Geschwindigkeitsgradienten abhängig, im nichtlinearen Teil tritt zusätzlich der Verschiebungsgradient auf.

2.3.2 Spannungen

Die aktuelle mechanische Beanspruchung eines materiellen Punktes wird durch den Cauchyschen Spannungstensor \mathbf{T} charakterisiert. Auf einer gedachten Schnittfläche durch den materiellen Punkt wirkt der Spannungsvektor \mathbf{t} der Momentankonfiguration. Die als Cauchy-Theorem bezeichnete lineare Beziehung zwischen dem Spannungsvektor und dem äußeren Normalenvektor \mathbf{n} der betrachteten Schnittfläche

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (2.34)$$

definiert den Cauchyschen Spannungstensor als Beanspruchungsmaß der Momentankonfiguration. Die Definition setzt nur die Kontinuumsannahme voraus und gilt damit ebenso für die in Kapitel 3 behandelten Fluide. Für den Spannungsvektor \mathbf{t}_0 der Referenzkonfiguration gilt analog zu (2.34) die lineare Beziehung

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 \quad (2.35)$$

mit dem 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (2.36)$$

als Transformation des Cauchyschen Spannungstensors in die Referenzkonfiguration. Die Definition (2.36) folgt aus der Bedingung, daß der auf einer beliebigen Schnittfläche wirkende resultierende Kraftvektor in beiden Konfigurationen identisch sein muß. Der im folgenden Abschnitt angegebene Drehimpulserhaltungssatz fordert die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors, wohingegen der nach (2.36) definierte 1. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor unsymmetrisch ist. Daher wird der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (2.37)$$

als symmetrische Rechengröße zur Beschreibung des Spannungszustandes in der Referenzkonfiguration verwendet, wobei die Komponenten des Tensors physikalisch nur eingeschränkt interpretierbar sind.

2.3.3 Erhaltungssätze der Mechanik in lokaler materieller Form

Die in diesem Abschnitt zusammengestellten Bilanzgleichungen für die mechanischen Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Drehimpuls in lokaler materieller Form bilden die Grundlage des in Abschnitt 2.3.6 vorgestellten numerischen Modells. Der Massenerhaltungssatz reduziert sich in der Lagrangeschen Betrachtungsweise auf die Transformationsvorschrift

$$\rho_0 = \rho \det \mathbf{F} \quad \text{in } Q_0 \quad (2.38)$$

für die momentane Massendichte ρ und bildet keine Bestimmungsgleichung des Berechnungsmodells. Darin ist $Q_0 = \Omega_0 \times I$ das betrachtete Raum-Zeit-Kontinuum der Referenzkonfiguration mit dem Rand $P_0 = \Gamma_0 \times I$. Der Impulserhaltungssatz

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div}_0 (\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho_0 \mathbf{b}_0 \quad \text{in } Q_0 \quad (2.39)$$

besagt, daß die zeitliche Änderung des Impulses jedes Teilkörpers gleich der Summe aller Oberflächen- und Volumenkräfte ist, die auf den Teilkörper wirken. \mathbf{b}_0 ist die z. B. durch ein Gravitationsfeld hervorgerufene massenbezogene Beschleunigung in der Referenzkonfiguration. Für ein Boltzmann-Kontinuum ohne flächen- bzw. volumenhaft verteilte Momente fordert der Drehimpulserhaltungssatz in materieller Darstellung die Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad \text{in } Q_0. \quad (2.40)$$

Die Erhaltungsgleichungen für Impuls und Drehimpuls (2.39) und (2.40) werden in der Literatur auch als dynamische Feldgleichungen bezeichnet.

2.3.4 Konstitutive Gleichungen für linear elastisches Material

Die kontinuumsmechanischen und thermodynamischen Grundlagen und die daraus folgenden Prinzipien, die bei der Formulierung phänomenologischer Materialgleichungen zu berücksichtigen sind, sowie weiterführende Literatur zu diesem Thema sind u. a. in [71] zusammengestellt. Hier wird nur die konstitutive Gleichung für das in dieser Arbeit verwendete Saint-Venant-Kirchhoff-Material angegeben. Dem Materialgesetz liegt die Annahme eines reversiblen, isothermen Prozesses zugrunde, womit die Formänderungsenergie Potentialcharakter annimmt und die Formulierung weg- und temperaturunabhängig ist. Als arbeitskonforme Paarung von Spannungs- und Verzerrungsmaß dienen der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor und der Greensche Verzerrungstensor. Die Annahme einer spannungsfreien Referenzkonfiguration sowie einer linearen Beziehung zwischen Spannungs- und Verzerrungsmaß führt auf die in der Referenzkonfiguration definierte Materialgleichung

$$\mathbf{S} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.41)$$

Die lineare Materialgleichung gilt für kleine Verzerrungen. Große Verschiebungen und Verdrehungen sind aber zulässig, da die kinematischen Gleichungen weiterhin uneingeschränkt gelten. Unter Berücksichtigung des Potentialcharakters der Formänderungsenergie und der Symmetrieeigenschaften von Spannungs- und Verzerrungstensor besitzt der vierstufige Elastizitätstensor $\underline{\mathbf{C}}$ im dreidimensionalen Raum 21 unabhängige Komponenten. Bei Einschränkung auf isotrope Materialien verbleiben

zwei unabhängige Elastizitätskonstanten, und die konstitutive Gleichung (2.41) kann mit den Lamé-Konstanten λ und μ in der Form

$$\mathbf{S} = \lambda(\text{spur} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (2.42)$$

angegeben werden. Zwischen den Lamé-Konstanten und den technisch gebräuchlichen, anschaulichen Materialparametern Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν gilt der Zusammenhang

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} . \quad (2.43)$$

Infolge der Potentialeigenschaften der Formänderungsenergiefunktion ist der Elastizitätstensor $\underline{\mathbf{C}}$ zeitinvariant, womit die Beziehung

$$\underline{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad \text{in } Q_0 \quad (2.44)$$

eine Ratenformulierung der Saint-Venant-Kirchhoffschen Materialgleichung (2.41) ist und in der vorliegenden Form die Ausgangsgleichung für die numerische Lösung in Abschnitt 2.3.6 darstellt.

2.3.5 Rand- und Anfangsbedingungen

Die kinematische Gleichung (2.33), die Impulsbilanz (2.39) und das Materialgesetz (2.44) bilden ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen und formulieren die Anfangs-Randwertaufgabe der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik. Wenn N_D die Dimension des Raumes ist, enthält das System $2N_D$ partielle Differentialgleichungen erster Ordnung im Raum sowie für jeden materiellen Punkt $2N_D$ gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Folglich ist die Angabe von N_D Randbedingungen auf allen Teilen des Randes und von $2N_D$ Anfangsbedingungen im gesamten räumlichen Gebiet zur Lösung des Systems erforderlich.

Der Rand des Raum-Zeit-Kontinuums der Referenzkonfiguration

$$P_0 = P_0^g \cup P_0^h \quad \text{mit} \quad P_0^g \cap P_0^h = \emptyset \quad (2.45)$$

besteht aus dem Dirichlet-Teil P_0^g mit den geometrischen Randbedingungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} \quad \text{auf } P_0^g \quad (2.46)$$

und dem Neumann-Teil P_0^h , auf dem die dynamischen Randbedingungen

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{h}_0 \quad \text{auf } P_0^h \quad (2.47)$$

gelten. Darin sind \mathbf{g} eingeprägte Geschwindigkeiten und \mathbf{h}_0 die in die Referenzkonfiguration transformierten eingepprägten Randspannungen.

Die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_a \quad \text{in } \Omega_0 \quad (2.48)$$

bestimmen das Verschiebungs- und Geschwindigkeitsfeld der Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt $t=0$. Die homogene Bedingung für das Verschiebungsfeld folgt direkt aus der Definition des Verschiebungsvektors nach (2.29).

2.3.6 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Elastodynamik

Die stabilisierte zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik für die Raum-Zeit-Scheibe $Q_{0,n} = \Omega_0 \times I_n$ mit dem Dirichlet-Rand $P_{0,n}^g = \Gamma_0^g \times I_n$ und dem Neumann-Rand $P_{0,n}^h = \Gamma_0^h \times I_n$ hat in gemischt-hybrider Darstellung die Form

$$\int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \cdot \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \, dQ_0 + \int_{Q_{0,n}} \dot{\mathbf{E}}(\delta \mathbf{v}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{S} \, dQ_0 - \int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \cdot \rho_0 \mathbf{b}_0 \, dQ_0 \quad (2.49a)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_{0,n}^e} \delta \mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u})) \, dQ_0 \quad (b)$$

$$+ \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{v}(t_n^+) \cdot \rho_0 (\mathbf{v}(t_n^+) - \mathbf{v}(t_n^-)) \, d\Omega_0 \quad (c)$$

$$+ \sum_e \int_{\Omega_0^e} \delta \mathbf{S}(t_n^+) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{S}(t_n^+) - \mathbf{S}(t_n^-)) \, d\Omega_0 \quad (d)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_{0,n}^e} \boldsymbol{\tau}_{Imp}^S \cdot \delta \dot{\mathbf{v}} \cdot (\rho_0 \dot{\mathbf{v}} - \text{div}_0(\mathbf{F}\mathbf{S}) - \rho_0 \mathbf{b}_0) \, dQ_0 \quad (e)$$

$$- \int_{P_{0,n}^g} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_0 \, dP_0 + \int_{P_{0,n}^g} \delta \mathbf{t}_0 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{g}) \, dP_0 \quad (f)$$

$$- \int_{P_{0,n}^h} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}_0 \, dP_0 = 0 \quad \forall \, \delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{S}, \delta \mathbf{t}_0. \quad (g)$$

Die numerische Lösung der Modellgleichungen im Raum-Zeit-Gebiet Q_0 erfolgt durch sukzessive Auswertung von (2.49) für alle Zeitscheiben $Q_{0,0}, \dots, Q_{0,N-1}$ und beginnt nach (2.48) mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{v}(t_0^-) = \mathbf{v}_a \quad \text{und} \quad \mathbf{S}(t_0^-) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_0. \quad (2.50)$$

Primale Variablen der Formulierung sind Geschwindigkeiten \mathbf{v} und Piola-Kirchhoff-II-Spannungen \mathbf{S} sowie die Randspannungen \mathbf{t}_0 auf dem Dirichlet-Rand. Die Integration der Geschwindigkeiten über das Zeitinkrement I_n führt auf die aktuellen

Verschiebungsinkremente und zusammen mit den Inkrementen aller vorhergehenden Zeitscheiben auf die Verschiebungen

$$\mathbf{u}(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \int_{I_i} \mathbf{v} \, dt \quad \text{in } \Omega_0 \quad (2.51)$$

am Ende der Zeitscheibe. Die gemischt-hybride Geschwindigkeits-Spannungs-Formulierung der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik geht auf ein semidiskretes Verfahren für elasto-viskoplastische Kontinua von Knippers und Harbord [41, 42] zurück. Die Ansatzfunktionen für Geschwindigkeiten und Randspannungen sind im Raum stetig und in der Zeit an den Zeitscheibenübergängen unstetig, wogegen das durch Zeitintegration aus den Geschwindigkeiten gewonnene Verschiebungsfeld in Raum und Zeit stetig ist. Die Spannungsansätze gelten für lokale Spannungskomponenten im Element und sind zwischen den Elementen in Raum und Zeit unstetig.

Zeile (a) von Gleichung (2.49) zeigt die nach Standard-Galerkin-Wichtung und partieller Integration von (2.39) folgende schwache Form der Impulsbilanz, die in integraler Form auch die Impulserhaltung zwischen den Elementen sicherstellt. In Zeile (b) folgt die Ratenformulierung der konstitutiven Gleichung (2.44) nach Anwendung des Standard-Galerkin-Verfahrens in den offenen Gebieten $Q_{0,n}^e$ aller Raum-Zeit-Elemente. Die Sprungterme der zeitdiskontinuierlichen Formulierung der Geschwindigkeiten (c) und der Spannungskomponenten (d) erfüllen die Übergangsbedingungen zwischen den Zeitscheiben in integraler Form. Die für die Untersuchung von Wellenausbreitungsphänomenen erforderliche Petrov-Galerkin-Stabilisierung der Elemente in Zeile (e) erweitert die Standard-Galerkin-Wichtung der Impulsbilanz um den mit der Matrix der Stabilisierungsparameter τ_{imp}^S multiplizierten Trägheitsterm der starken Form. Das erste Randintegral in Zeile (f) entsteht bei der partiellen Integration der Impulsbilanz und dient der Bestimmung der Randspannungen auf dem Dirichlet-Rand. Der zweite Term beinhaltet die mit der Randspannungsvariation gewichtete Integralformulierung der geometrischen Randbedingungen (2.46). Die letzte Zeile (g) berücksichtigt die auf dem Neumann-Rand eingprägten Randlasten der dynamischen Randbedingungen (2.47). Für die Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{E}}$ in Zeile (a) und (b) wird die kinematische Beziehung (2.33) eingesetzt.

2.3.7 Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente

Stabilisierte Raum-Zeit-Elemente für die Modellgleichungen der Elastodynamik gehen auf Hughes und Hulbert [33] zurück. Um Konvergenz und Stabilität der zeitdiskontinuierlichen Zweifeld-Galerkin-Formulierung für beliebige Ansatzordnungen nachzuweisen, wenden sie das Galerkin/Least-Squares-Verfahren auf alle Modellgleichungen an. Auch die von der Standard-Galerkin-Formulierung nach partieller

Integration schwach erfüllte Impulsbilanz zwischen den Elementen wird zusätzlich durch Least-Squares-Terme erzwungen. Hierfür sind auf den Innenrändern aller Elemente die Ansätze der jeweils angrenzenden Elemente auszuwerten, womit die programmtechnische Umsetzung eine aufwendige Datenstruktur erfordert. Da die Stabilisierung der Übergangsbedingungen jedoch fast keinen Einfluß auf die Ergebnisse von Beispielberechnungen am eindimensionalen Dehnstab hat, regen Hughes und Hulbert an, die Stabilisierungsterme auf den Innenrändern nicht zu berücksichtigen.

Beispielhafte Untersuchungen ein- und zweidimensionaler Wellenausbreitungsphänomene in linear elastischen Kontinua mit der hier vorgestellten Formulierung (2.49) unter Berücksichtigung verschiedener zusätzlicher Stabilisierungsterme motivieren die alleinige Verwendung des Trägheitsterms der Impulsbilanz zur Erweiterung der Galerkin-Wichtung. Die Beispielberechnungen an den Systemen aus Abschnitt 2.4.2 und 2.4.3 erfolgen mit diskontinuierlich linearen Ansätzen in der Zeit. Im zweidimensionalen Raum kommt ein bilinearer und ein biquadratischer Geschwindigkeitsansatz zum Einsatz, womit Raum-Zeit-Hexaederelemente mit 8 bzw. 18 Knoten folgen. Die zugehörigen, lokal definierten Spannungsansätze sind unter Einhaltung der Babuška-Brezzi-Bedingung auf den jeweiligen Geschwindigkeitsansatz abgestimmt.

Für den Spannungsansatz des 8-Knoten-Elements verschwindet die Divergenz des Spannungstensors im Element, mit der Folge, daß der Spannungsterm der starken Form der Impulsbilanz im Element zu null wird. Somit entfällt der Spannungsterm in der Stabilisierung und kommt auch zur Modifikation der Wichtungsfunktion nicht in Frage. Eine zusätzliche Galerkin / Least-Squares-Stabilisierung der konstitutiven Gleichung (2.49b) hat keinen positiven Einfluß auf die Lösung, kann aber zu sägezahnförmigen Zeitverläufen der Randspannungen führen, die bei reduzierter Integration der Stabilisierungsterme in der Zeit wieder geglättet werden. Instabile Lösungen oder im Raum oszillierende Spannungsverläufe, die zusätzliche Stabilisierungsterme auf den Elementrändern erfordern, treten beim 8-Knoten-Element nicht auf.

Das 18-Knoten-Element ermöglicht die Berücksichtigung der vollständigen Galerkin / Least-Squares-Stabilisierung der Impulsbilanz, die für die eindimensionale Wellenausbreitung stabile Lösungen mit sehr geringen numerischen Oszillationen liefert. Auch im zweidimensionalen Fall bleiben numerische Oszillationen klein, jedoch treten bei starken Gradienten unphysikalische Spannungszustände in den Elementen und große Spannungssprünge zwischen den Elementen auf. Besteht die Erweiterung der Galerkin-Wichtung wie in (2.49e) nur aus dem Trägheitsterm, so entstehen keine gestörten Spannungszustände, aber deutlich stärkere numerische Oszillationen. Die Berücksichtigung des Spannungsterms in der Wichtung erfordert demnach zusätzliche Stabilisierungsterme auf den Elementrändern. Um die aufwendige Implementierung der Innenrandstabilisierung zu vermeiden, wird die Wichtung nur mit dem

Trägheitsterm erweitert. Eine Stabilisierung der konstitutiven Gleichung hat auch im 18-Knoten-Element kaum Einfluß auf die Ergebnisse der Beispielberechnungen und ist daher in der schwachen Form (2.49) nicht enthalten.

Im Rahmen dieser Arbeit kommt für Strukturanalysen allein das robustere 8-Knoten-Element zum Einsatz. Die Ansatzfunktionen für Geschwindigkeiten und lokale Spannungskomponenten sind im folgenden Abschnitt zusammengestellt. Die Wahl der Stabilisierungsparameter erfolgt unter der Bedingung, daß die Stabilität des Verfahrens zunimmt und die Genauigkeitsordnung der Standard-Galerkin-Formulierung möglichst erhalten bleibt. In Anlehnung an Hughes und Hulbert [33] gilt für die Komponenten τ_{ij}^S der Stabilisierungsmatrix τ_{imp}^S

$$\tau_{ii}^S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2c_p}{\Delta x_i}\right)^2}}, \quad \tau_{ij}^S = 0, \quad i \neq j \quad (2.52)$$

mit $i, j = 1, \dots, N_D$, wobei N_D die Dimension des Raumes ist. Δx_i ist die maximale Elementabmessung in Richtung der i -ten Koordinatenachse und

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.53)$$

die Kompressionswellengeschwindigkeit für den dreidimensionalen Raum und den ebenen Verzerrungszustand mit den Lamé-Konstanten nach (2.43). Für den ebenen Spannungszustand sei z. B. auf [33] verwiesen. Da die Stabilisierungsparameter die Dimension der Zeit besitzen, ist auch die Bezeichnung innere Zeitskalen (intrinsic time-scales) gebräuchlich. Die Courant-Zahl

$$C = c_p \frac{\Delta t}{h} \quad (2.54)$$

gibt das Verhältnis der zeitlichen zur räumlichen Diskretisierung an. Der räumliche Abstand h ist im eindimensionalen Fall die Elementlänge und bei mehrdimensionalen Elementen eine charakteristische Länge, wie z. B. der Durchmesser eines flächengleichen Kreises bzw. einer volumengleichen Kugel. Bei großen Courant-Zahlen bewegt sich eine Kompressionswelle in einem Zeitschritt durch mehrere Elemente im Raum. In diesem Fall ist die innere Zeitskala eines Elements

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \tau_{ii}^S = \frac{\Delta x_i}{2c_p} \quad (2.55)$$

die Zeit, in der die Welle das halbe Element durchläuft. Bei kleinen Courant-Zahlen verbleibt die Welle in einem Element, und die innere Zeitskala

$$\lim_{C \rightarrow 0} \tau_{ii}^S = \frac{\Delta t}{2} \quad (2.56)$$

ist die halbe Zeitschrittweite.

Explizite Zeitintegrationsverfahren erfordern die Einhaltung der Bedingung $C < 1$, um Stabilität zu gewährleisten, womit eine lokale räumliche Netzverfeinerung einen entsprechend kleinen Zeitschritt für das gesamte Gebiet erzwingt. Die zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Finite-Element-Methode ist für beliebige Courant-Zahlen stabil und liefert bei großen Courant-Zahlen auch ohne Stabilisierung glatte Lösungen, wobei steile Wellenfronten abgeflacht werden. Bei kleinen Courant-Zahlen ist die Auflösung von Stößen gewährleistet, jedoch treten numerische Oszillationen auf, die auch mit Stabilisierung nicht vollständig verschwinden. Hierfür ist ein zusätzlicher Discontinuity-Capturing-Operator, wie z. B. von Hulbert [35] vorgestellt, notwendig.

2.3.8 Ansätze im Element

Das in Bild 2.8 dargestellte 8-Knoten-Raum-Zeit-Hexaederelement für Aufgaben mit zwei Raumdimensionen entspricht einem üblichen isoparametrischen 8-Knoten-Hexaederelement für dreidimensionale Aufgabenstellungen, mit der Einschränkung, daß die Richtungen der lokalen Raumkoordinaten ξ^1 und ξ^2 orthogonal zur Richtung der globalen Zeitkoordinate t sind. Der Geometrieansatz im Element

$$\begin{bmatrix} x_1(\xi^1, \xi^2, \tau) \\ x_2(\xi^1, \xi^2, \tau) \end{bmatrix}_e = \sum_{k=1}^8 \phi_k(\xi^1, \xi^2, \tau) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}_k, \quad -1 \leq \xi^1, \xi^2, \tau \leq 1 \quad (2.57)$$

beschreibt die globalen Raumkoordinaten x_1, x_2 eines Punktes in Abhängigkeit von den lokalen Koordinaten und den Knotenwerten. Die trilinearen Formfunktionen ϕ_k sind der Standardliteratur zur Methode der finiten Elemente, z. B. [5, 87], zu entnehmen. Die globale Zeitkoordinate im Element

$$t(\tau) = \frac{1}{2}(1 - \tau)t_n + \frac{1}{2}(1 + \tau)t_{n+1}, \quad -1 \leq \tau \leq 1 \quad (2.58)$$

wird durch die lokale Zeitkoordinate τ eindeutig bestimmt.

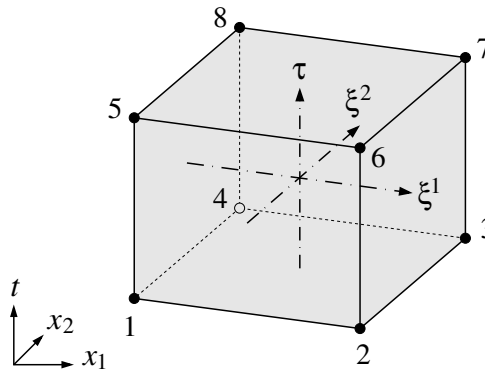


Bild 2.8: 8-Knoten-Raum-Zeit-Hexaederelement

Die in (2.57) angegebene Abhängigkeit der globalen Raumkoordinaten von der lokalen Zeitkoordinate tritt bei der total Lagrangeschen Formulierung der Elastodynamik nicht auf, da die Modellgleichungen in der Referenzkonfiguration definiert sind. Die in der Zeit veränderliche Elementgeometrie ermöglicht aber die in Kapitel 3 beschriebene Diskretisierung der Strömungsgleichungen in einem zeitveränderlichen räumlichen Gebiet auf natürliche Weise.

Die Interpolation der Geschwindigkeitskomponenten im Element erfolgt mit den Formfunktionen ϕ_k des trilinearen Geometrieansatzes (2.57) unter Verwendung der Knotenwerte $\hat{\mathbf{v}}_k$ als Freiwerte und führt auf den Ansatz

$$\mathbf{v}_e(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \sum_{k=1}^8 \phi_k(\boldsymbol{\xi}, \tau) \hat{\mathbf{v}}_k . \quad (2.59)$$

Gradient und Zeitableitung der Geschwindigkeit im Element folgen durch Ableitung der Formfunktionen nach den globalen Raum- und Zeitkoordinaten unter Anwendung der Kettenregel. Für die unbekannten Randspannungen \mathbf{t}_0 auf dem Dirichlet-Rand wird ein Produktansatz aus linearen Funktionen in Raum und Zeit gewählt, der dem Geschwindigkeitsansatz auf den Elementrändern entspricht.

Grundlage gemischter Finite-Element-Modelle in der Elastostatik ist die Variationsformulierung des Hellinger-Reissner-Funktional [61] mit getrennten Ansätzen für Verschiebungen und Spannungen. Das Variationsprinzip ist äquivalent zur Standard-Galerkin-Formulierung von Gleichgewicht und Materialgesetz, siehe [87]. Unabhängige Ansätze im Elementgebiet und auf dem Rand führen auf hybride Elemente. Der Begriff gemischt-hybride Formulierung für die Integralgleichung (2.49) bezeichnet in Anlehnung an Pian et al. [56] und Atluri et al. [4, 86] eine gemischte Formulierung mit kontinuierlichen Verschiebungsansätzen und diskontinuierlichen Spannungsansätzen, wobei zusätzliche Spannungsansätze auf den Elementrändern entfallen, da die Kontinuität des Spannungsverlaufs zwischen den Elementen in schwacher Form von der diskretisierten Impulsgleichung (2.49a) erzwungen wird.

Um eindeutige und stabile Lösungen ohne Locking-Effekte zu gewährleisten, dürfen die lokalen Spannungsansätze nicht unabhängig vom Verschiebungsansatz gewählt werden, sondern müssen auf diesen abgestimmt sein. Aus mathematischer Sicht ist die Babuška-Brezzi-Bedingung für beliebige Elementierungen zu erfüllen [86]. Für die Anzahl der Spannungsfreiwerte N_σ führt die Forderung nach eindeutigen Verschiebungslösungen auf die notwendige Bedingung

$$N_\sigma \geq N_u - N_r , \quad (2.60)$$

die das Auftreten kinematischer Ketten verhindert und wonach die Anzahl linear unabhängiger Spannungszustände größer oder gleich der Anzahl der Verschiebungsfreiwerte N_u abzüglich möglicher Starrkörperbewegungen N_r sein muß. Bei einer zu

großen Anzahl von Spannungsfreiwerten können die Elemente jedoch versteifen und zu Locking-Effekten oder spannungsbehafteten Starrkörperbewegungen führen. Für den lokalen Spannungsansatz im Element ist daher die minimale Anzahl Freiwerte, die die Bedingung (2.60) im Element erfüllt, die günstigste Wahl. Die Anforderungen an den Spannungsansatz lassen sich analog auf die Raum-Zeit-Formulierung (2.49) übertragen, wenn die Verschiebungsfreiwerte durch Geschwindigkeiten ersetzt und nur die räumlichen Verläufe der Ansätze betrachtet werden.

Die Anzahl der Spannungsfreiwerte für den räumlichen Ansatz sollte im 8-Knoten-Raum-Zeit-Element demnach $N_{\sigma} = N_u - N_r = 8 - 3 = 5$ betragen. Bei linearen Ansätzen in der Zeit folgen insgesamt 10 Spannungsfreiwerte a_i im Element. Nach Xue et al. [86] existieren für ein 4-Knoten-Rechteckelement genau zwei Spannungsansätze geringster Ordnung, d. h. mit fünf Freiwerten, die beobachterinvariant und stabil sind, also die Babuška-Brezzi-Bedingung erfüllen. Die Wahl fällt dabei auf den Ansatz, der neben konstanten Spannungszuständen auch Biegebeanspruchungen abbilden kann. Die Normalspannungen verlaufen in Spannungsrichtung konstant und senkrecht dazu linear, die Schubspannung ist konstant im Element. Damit verschwindet die Divergenz des Spannungstensors, und der Ansatz erfüllt das Gleichgewicht homogen im Elementinneren. Die Multiplikation mit dem linearen Zeitansatz und die Formulierung in lokalen, schiefwinkligen Koordinaten führt auf den Produktansatz

$$\begin{aligned}\tilde{S}_e^{11} &= (a_1 + a_2 \xi^2) + (a_6 + a_7 \xi^2) \tau, \\ \tilde{S}_e^{22} &= (a_3 + a_4 \xi^1) + (a_8 + a_9 \xi^1) \tau, \\ \tilde{S}_e^{12} &= \tilde{S}_e^{21} = a_5 + a_{10} \tau\end{aligned}\tag{2.61}$$

für die Spannungskomponenten im 8-Knoten-Raum-Zeit-Element. In der isoparametrischen Formulierung beziehen sich die lokalen Spannungskomponenten \tilde{S}^{ij} auf die kovariante Basis der lokalen Koordinaten ξ^m in Elementmitte. Damit bleibt die Beobachterinvarianz erhalten, aber der Nachweis stabiler Lösungen ist für beliebig verzerrte Elementgeometrien nicht mehr möglich. Doch liefern auch extrem schiefwinklige Elemente noch genauere Ergebnisse als die reine Weggrößenformulierung, siehe Abschnitt 2.4.1.

2.3.9 Iterative Lösung der diskretisierten Gleichungen

Die Auswertung der Integrale in der Finite-Element-Formulierung (2.49) erfolgt auch für die Zeilen (a), (c), (f) und (g) als Summe über alle Elemente, da die Ansätze für Geschwindigkeiten und Randspannungen aus elementweise trilinearen bzw. randabschnittsweise bilinearen Ansatzfunktionen zusammengesetzt sind, und führt auf ein globales Gleichungssystem zur Bestimmung der Freiwerte, das formal der gemischten Darstellung (2.22) entspricht. Nur die Nebendiagonalmatrizen $\hat{\mathbf{H}}$ sind infolge der

nichtlinearen Kinematik (2.33) vom Verschiebungszustand abhängig. Die Auswertung der Materialgleichung (b) und des Spannungssprungterms (d) erfolgt lokal im Element, bevor die Elementanteile der Integralausdrücke zum globalen Gleichungssystem aufsummiert werden, da die Freiwerte der lokalen Spannungsansätze in den einzelnen Elementen unabhängig voneinander sind und die zugehörigen Wichtungsfunktionen nur in den jeweiligen Elementgebieten existieren. Wie in Abschnitt 2.2.4 beschrieben, führt dies zur Ablösung der Spannungsfreiwerte, so daß im globalen Gleichungssystem nur Geschwindigkeits- und Randspannungsfreiwerte auftreten.

Das nichtlineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Zustandsvariablen der n -ten Zeitscheibe mit der vom aktuellen Verschiebungszustand abhängigen globalen Systemmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ nimmt bei Ausblendung der geometrischen Randbedingungen und zugehöriger Randspannungsfreiwerte die Form

$$\hat{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{u}}_n) \hat{\mathbf{v}}_n = \hat{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{u}}_n) \quad (2.62)$$

an. Darin sind $\hat{\mathbf{u}}_n$ und $\hat{\mathbf{v}}_n$ die Knotenwerte der Verschiebungen und Geschwindigkeiten in der aktuellen Zeitscheibe, wobei die Verschiebungen nach (2.51) aus den Geschwindigkeiten folgen. Die rechte Seite $\hat{\mathbf{b}}$ ist infolge der Sprungterme zusätzlich von den Geschwindigkeiten und Spannungen am Ende der vorhergehenden Zeitscheibe abhängig. Da Systemmatrix und rechte Seite in (2.62) vom noch unbekannten Verschiebungszustand abhängen, ist eine iterative Lösung erforderlich. Hierzu wird in der Strukturmechanik häufig das Newton-Raphson-Verfahren verwendet, das zu quadratischer Konvergenz führt, wenn eine exakte Tangente der Matrix $\hat{\mathbf{K}}$ verwendet wird. Schwerpunkt dieser Arbeit ist jedoch die Lösung gekoppelter Struktur-Fluid-Systeme, bei denen man die Tangente nur näherungsweise bestimmen kann, wobei das Verfahren für Strömungen nicht unbedingt die beste Wahl ist, siehe [16]. Um die einheitliche Lösung des in Kapitel 4 behandelten gekoppelten Gesamtsystems zu gewährleisten, kommt daher auch für die Strukturdynamik ein fixpunktartiges Verfahren zum Einsatz, das für den i -ten Iterationsschritt auf die Gleichung

$$\hat{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{u}}_n^{i-1}) \hat{\mathbf{v}}_n^i = \hat{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{u}}_n^{i-1}) \quad (2.63)$$

führt und in der Literatur [16, 87] häufig als Picard-Iteration bezeichnet wird. Startwert der Anfangsverschiebungen der Zeitscheibe ist die letzte berechnete Lösung, Startwert der Endverschiebungen die Summe aus Anfangsverschiebungen und Verschiebungsinkrementen der letzten Zeitscheibe.

Die Lösung der linearisierten, infolge Raum-Zeit-Formulierung unsymmetrischen Gleichungssysteme (2.63) erfolgt nach Bandbreitenoptimierung mit einem Cuthill-McKee-Algorithmus wahlweise durch direkte LU-Zerlegung oder mit einem vorkonditionierten iterativen BiCGStab-Löser. Nähere Hinweise zu den verwendeten Gleichungslösern finden sich in der Arbeit von Walhorn [81].

2.4 Verifikationsbeispiele zur Elastodynamik

Die Verifikation und Beurteilung der vorgestellten Formulierung für die Elastodynamik erfolgt anhand verschiedener Testbeispiele. Zunächst wird die gemischt-hybride Elementformulierung im linearen Fall und bei statischer Belastung mit dem isoparametrischen 4-Knoten-Weggrößenelement verglichen und der Einfluß der Elementgeometrie untersucht. Das nachfolgende Beispiel betrachtet die Wellenausbreitung im eindimensionalen, linear elastischen Kontinuum und dient dem Vergleich der zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Formulierung mit der stabilisierten Variante und dem Newmark-Verfahren. Im dritten Beispiel erfolgt die Anwendung der stabilisierten Formulierung auf Wellenausbreitungsphänomene im zweidimensionalen elastischen Halbraum. Das letzte Beispiel zeigt die Dynamik einer der Seiltheorie gehorchenden einachsig gespannten Membran unter Eigengewicht bei großen Verformungen.

2.4.1 Kragarm unter Biegung – Einfluß der Elementgeometrie

Im Gegensatz zum 4-Knoten-Scheibenelement in Weggrößen-Formulierung kann die gemischt-hybride Variante auch Biegebeanspruchungszustände abbilden. Jedoch verschlechtert sich diese Eigenschaft bei schiefwinkliger Elementgeometrie. Der Einfluß der Gestaltänderung auf die Approximationsgüte der Elemente wird an dem von Punch und Atluri [59] vorgeschlagenen und in Bild 2.9 dargestellten Kragarm unter konstanter Biegebeanspruchung untersucht.

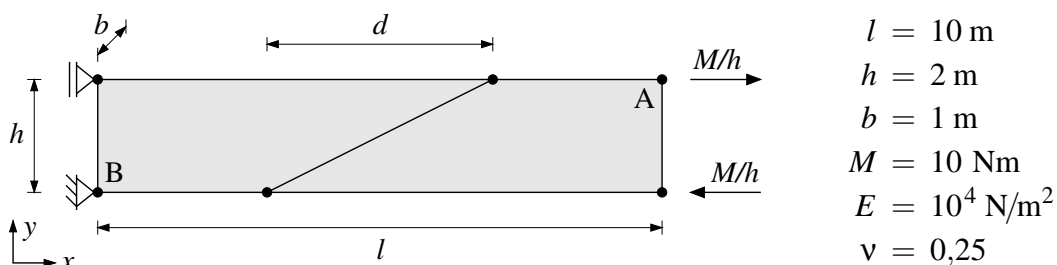


Bild 2.9: Kragarm unter Momentenbeanspruchung (ebener Spannungszustand)

Die Untersuchung auf Grundlage der linearen Elastizitätstheorie gilt für den ebenen Spannungszustand. Als Vergleichswerte für die Approximationsgüte dienen die Durchbiegung u_y der Kragarmspitze in Punkt A und die Normalspannung σ_{xx} am Rand der Einspannung in Punkt B. Die Angabe der Werte erfolgt bezogen auf die analytische Lösung des Euler-Bernoulli-Balkens. Das Verhältnis d/l gibt die Abweichung der Elementgeometrie von der Rechteckform an und dient als Maß für die Gestaltänderung. Bild 2.10 zeigt die Approximationsgüte in Abhängigkeit von der Gestaltänderung. Das Weggrößenelement blockiert unter Biegebeanspruchung, womit die Lösung im rechteckigen Fall weniger als 30% der Balkenlösung erreicht und

mit zunehmender Verformung auf unter 10% abfällt. Der Wert der Normalspannung verbessert sich bei sehr großen Formänderungen wieder, wenn der Vergleichswert in Punkt B zugrundeliegt. Dagegen nimmt die Güte der Spannungslösung am oberen Rand des Kragarms mit zunehmender Verformung ab. Die Lösung der gemischt-hybriden Formulierung entspricht bei rechtwinkliger Elementgeometrie exakt der Balkenlösung, da der Spannungsansatz (2.61) den Zustand konstanter Biegung beinhaltet. Mit zunehmender Abweichung von der Rechteckform nimmt aber auch hier die Approximationsgüte ab, allerdings auf wesentlich höherem Niveau, so daß die Lösung 50% der Balkenlösung nicht unterschreitet. Eine Möglichkeit auch bei extrem schiefwinkliger Elementgeometrie Biegeverformungen exakt zu simulieren ist nach Wu und Cheung [85] die zusätzliche Formulierung von Straftermen zur Erzwingung des Gleichgewichts im Element, was formal einer Galerkin/Least-Squares-Stabilisierung der Gleichgewichtsbedingungen entspricht.

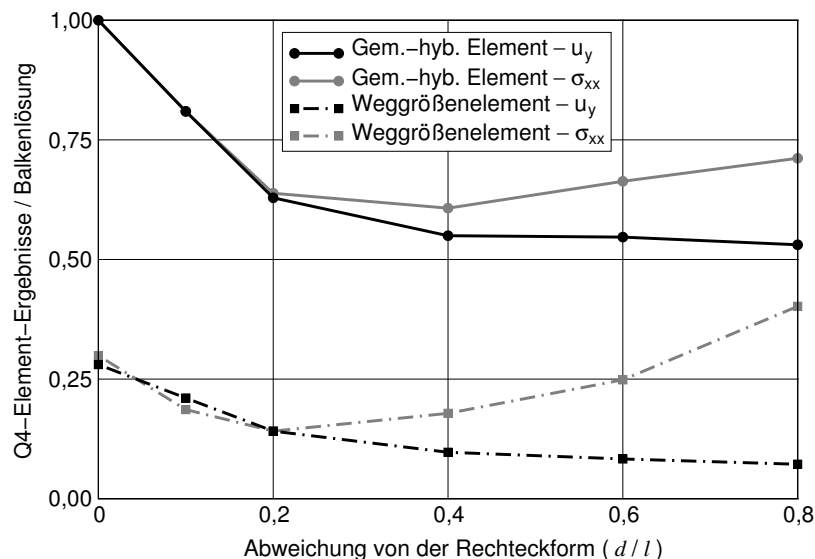


Bild 2.10: Durchbiegung in A und Normalspannung in B – Vergleich mit Balkenlösung

2.4.2 Stoßwelle im Dehnstab – Einfluß der Stabilisierung

Die Eigenschaften der zeitlichen Diskretisierung mit dem zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Verfahren sind in Abschnitt 2.2.3 für den Einmassenschwinger zusammengestellt. Zur Beurteilung der Eigenschaften der Raum-Zeit-Diskretisierung und der Abhängigkeiten von räumlicher und zeitlicher Diskretisierung wird in diesem Abschnitt die eindimensionale Stoßwellenausbreitung im linear elastischen Dehnstab betrachtet. Die Untersuchung vergleicht die zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Formulierung mit der stabilisierten Variante sowie einer semidiskreten Formulierung unter Verwendung des Standard-Newmark-Verfahrens als Zeitintegrationsmethode. Bild 2.11 zeigt die Systemskizze und die Materialeigenschaften des Dehnstabs.

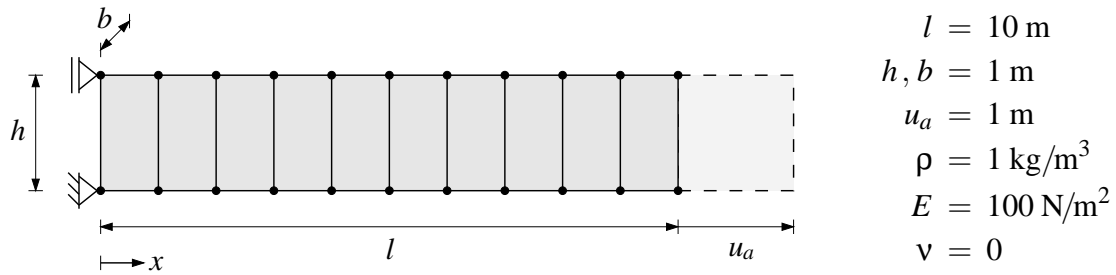


Bild 2.11: Systemskizze zur Stoßwellensimulation im Dehnstab

Die Berechnung beginnt mit der Anfangsauslenkung des Stabendes um den Wert u_a . Damit liegt zum Anfangszeitpunkt ein sich in Ruhe befindender Stab mit konstanten Spannungs- und Dehnungsverläufen vor, dem am Stabende ein auf den Wert Null abfallender Spannungssprung eingeprägt wird. In der Folge bewegen sich Unstetigkeiten im Geschwindigkeits- und Normalspannungsverlauf mit der Kompressionswellengeschwindigkeit $c_p = 10 \text{ m/s}$ nach (2.53) durch den Stab und werden abwechselnd am festen und am freien Rand reflektiert. Es folgen die in Bild 2.12 dargestellten Zeitverläufe von Verschiebung und Geschwindigkeit für das Stabende mit $x = l$.

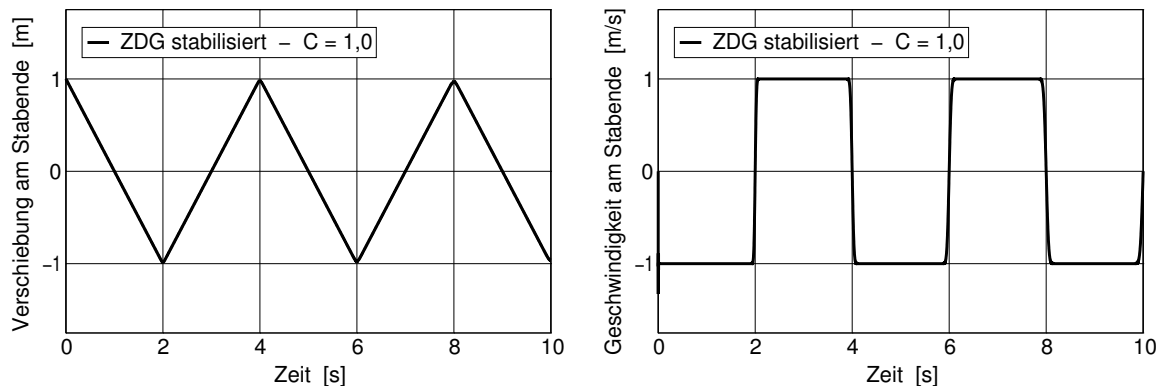


Bild 2.12: Verschiebungs- und Geschwindigkeitsverlauf am Stabende – 1000 Elemente

Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit 1000 Elementen, und die Zeitschrittweite liegt zwischen $\Delta t = 10^{-4}$ und $\Delta t = 10^{-2}$. Das Verhältnis von zeitlicher zu räumlicher Diskretisierung wird nach (2.54) durch die Courant-Zahl charakterisiert, die hier die Werte $C = 0,1$; 1 und 10 annimmt. Bei $C = 1$ durchläuft die Stoßwelle in einem Zeitschritt genau ein Element. Am Ende des Abschnitts wird die Genauigkeit der Simulation für die verschiedenen Courant-Zahlen untersucht, wobei zeitliche und räumliche Diskretisierung jeweils gleichzeitig variiert werden.

Bei der Auflösung der Diskontinuitäten in Raum und Zeit unterscheiden sich die untersuchten Verfahren deutlich voneinander. Bild 2.13 zeigt einen Vergleich der Sprungauflösung in den Zeitverläufen der Geschwindigkeiten. Die Zeitverläufe der Spannungen und die räumlichen Verteilungen der Größen verhalten sich analog.

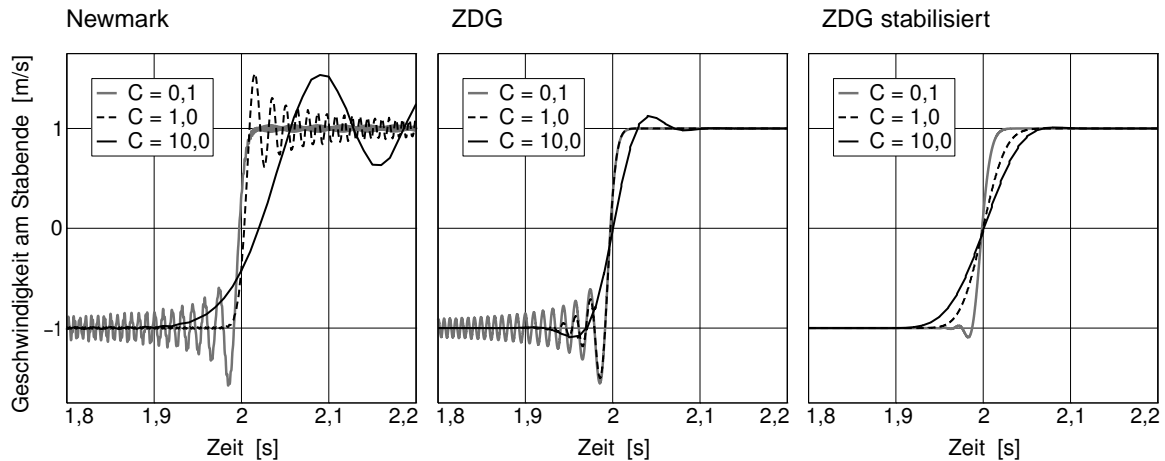


Bild 2.13: Sprungaflösung bei Variation der Courant-Zahl – 1000 Elemente

Der Standard-Newmark-Algorithmus liefert für alle Courant-Zahlen stark oszillierende Lösungen. Kleine Courant-Zahlen mit $C < 1$ führen zu Oszillationen, die den Unstetigkeiten vorausseilen, und bei großen Courant-Zahlen folgen die Oszillationen zeitlich nach den Unstetigkeiten. Für $C = 10$ ist ein stark abgeflachter Geschwindigkeitssprung verbunden mit einem deutlichen Phasenfehler zu beobachten. Die Raum-Zeit-Formulierung mit dem zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Verfahren (ZDG) führt bei kleinen Courant-Zahlen $C \leq 1$ ebenfalls auf oszillierende Lösungen mit vorausseilenden Oszillationen, die sich mit zunehmender Courant-Zahl jedoch reduzieren. Und bei großen Courant-Zahlen treten nur vor und nach jeder Unstetigkeit einzelne Überschwinger, verbunden mit einem abgeflachten Sprungverlauf, auf. Die zusätzliche Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente dämpft die numerischen Oszillationen außer bei sehr kleinen Courant-Zahlen vollständig heraus. Die künstlich eingebrachte Dissipation hat aber auch deutlich abgeflachte Sprungverläufe und folglich ungenauere Verschiebungslösungen zur Folge, siehe Bild 2.14.

Zur Beurteilung der Genauigkeit der Verfahren wird der Verschiebungsfehler am Stabende $|\bar{u}(l) - u(l)| / u(l)$ nach zwei Perioden zum Zeitpunkt $t = 8\text{ s}$ betrachtet, wobei $\bar{u}(x)$ die Näherungslösung kennzeichnet. Die Konvergenzordnung der Näherungslösung bei gleichzeitiger Verfeinerung der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung liegt für alle Verfahren deutlich unter eins, obwohl in Raum und Zeit mindestens Verfahren zweiter Ordnung zum Einsatz kommen. Verantwortlich hierfür ist das durch Diskontinuitäten bestimmte Systemverhalten, da die Auflösung von Unstetigkeiten maximal von erster Ordnung genau ist. Auch Verfahren höherer Ordnung, z. B. mit quadratischen Geschwindigkeitsansätzen im Raum, verbessern die Konvergenzordnung nicht. Ein Vergleich der Ergebnisse in Bild 2.14 zeigt für die stabilisierte Formulierung bei $C = 1$ einen deutlichen Verlust an Genauigkeit, der sich bei

kleineren und größeren Courant-Zahlen jedoch merklich verringert. Das Standard-Newmark-Verfahren liefert bei großen Courant-Zahlen im Vergleich zur zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Formulierung neben stärkeren numerischen Oszillationen auch ungenauere Verschiebungslösungen, da hier der zeitliche Diskretisierungsfehler in den Vordergrund tritt. Bei kleinen Courant-Zahlen dagegen ist allein die räumliche Diskretisierung für die Genauigkeit verantwortlich, so daß die Verschiebungsfehler von Newmark- und ZDG-Verfahren übereinstimmen.

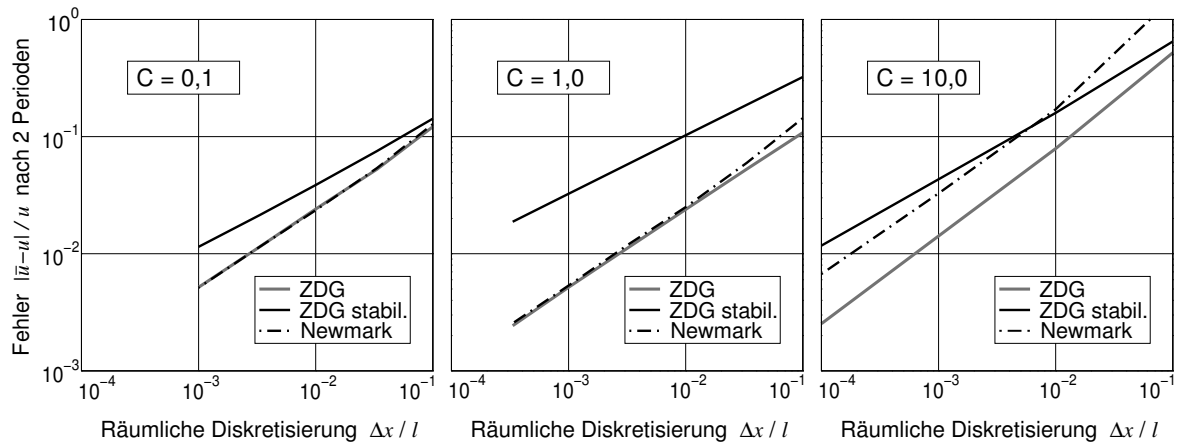


Bild 2.14: Konvergenzverhalten der Verschiebungslösung am Stabende

Die hohen Kompressionswellengeschwindigkeiten technisch wichtiger Werkstoffe, wie z. B. Stahl mit $c_p \approx 5100$ m/s, führen bei Aufgaben der Struktur- bzw. Elastodynamik selbst bei feiner zeitlicher Auflösung meist auf große Courant-Zahlen $C \gg 1$, so daß dieser Bereich von besonderem Interesse ist. Hier ist die zeitdiskontinuierliche Galerkin-Formulierung in Bezug auf Genauigkeit und Sprungauflösung dem Newmark-Verfahren weit überlegen. Eine zusätzliche Petrov-Galerkin-Stabilisierung glättet die an Diskontinuitäten auftretenden Überschwinger, was mit einem Verlust an Genauigkeit erkaufte wird. Die Fehlerordnung nimmt aber nur geringfügig ab.

Sollen Unstetigkeiten möglichst scharf und mit hohen Genauigkeitsanforderungen aufgelöst werden, ohne daß die Monotonie der Lösung verlorengeht, so sind geeignete Methoden momentan kaum verfügbar. Ein möglicher, jedoch recht aufwendiger Ansatz für diese Aufgabenstellung ist nach Grahs und Sonar [19] die Verwendung einer genauen, nur wenig dissipativen, allerdings zu starken unphysikalischen Oszillationen neigenden Methode höherer Ordnung, verbunden mit der in jedem Zeitschritt nachgeschalteten Anwendung eines geeigneten Filters zur Glättung der Lösung. Die in der Bildverarbeitung eingesetzten anisotropen nichtlinearen Diffusionsfilter sind in der Lage, kleinere numerische Oszillationen zu dämpfen und gleichzeitig große reale Sprünge zu schärfen.

2.4.3 Wellenausbreitung im berandeten elastischen Halbraum

In zweidimensionalen elastischen Kontinua treten neben den Kompressionswellen, die sich mit der Geschwindigkeit c_p nach (2.53) fortpflanzen und bei denen Teilchen in Richtung der Wellenausbreitung schwingen, Scherwellen auf, die sich mit der geringeren Geschwindigkeit $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ ausbreiten und durch senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingende Teilchen gekennzeichnet sind. An freien Rändern entstehen zudem als Rayleigh-Wellen bezeichnete Oberflächenwellen, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit c_r etwas unterhalb der Scherwellengeschwindigkeit liegt und bei denen die Oberflächenteilchen Ellipsenbewegungen ausführen. In dreidimensionalen geschichteten Halbräumen können in der obersten Schicht infolge Mehrfachreflexion von Scherwellen zusätzlich Love-Wellen auftreten, siehe z. B. [73].

Folglich ist in dem in Bild 2.15 skizzierten Verifikationsbeispiel eines zweidimensionalen linear elastischen, berandeten Halbraumes nach Einwirkung der Impulsbelastung $P(t)$ in der linken oberen Ecke die Ausbildung einer Kompressions-, einer Scher- und einer Rayleigh-Welle zu erwarten. Die gewählten Materialparameter führen auf die Wellengeschwindigkeiten $c_p = 1 \text{ m/s}$, $c_s = 0,707 \text{ m/s}$ und $c_r = 0,618 \text{ m/s}$.

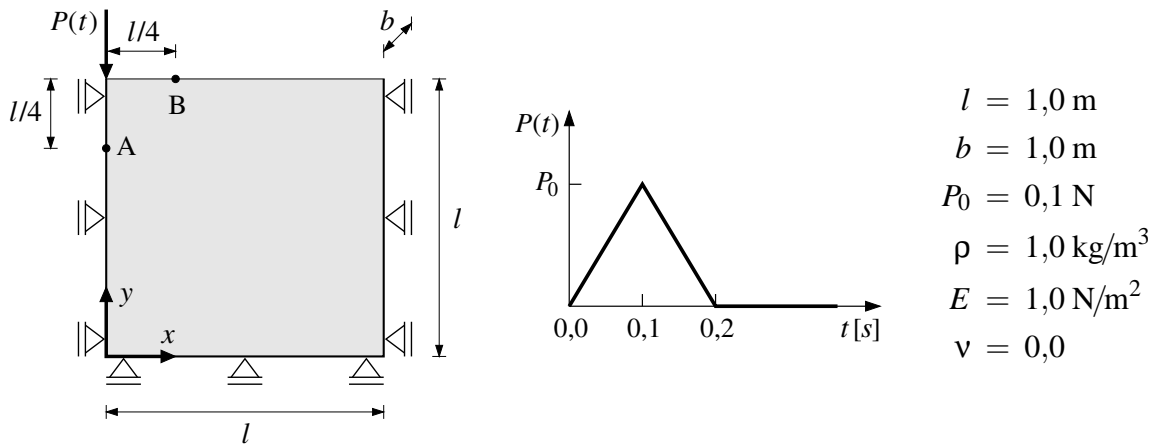


Bild 2.15: Systemskizze zur Impulswellenausbreitung im berandeten Halbraum

Das akademische Beispiel führt auf Verformungen, für die eine lineare Theorie ihren Gültigkeitsbereich verläßt, die hier aber zur besseren Veranschaulichung der Wellenausbreitungsphänomene in den Bildern 2.17 und 2.18 dienen sollen. Das Rechengebiet ist mit 80×80 gemischt-hybriden Raum-Zeit-Elementen mit trilinearen Geschwindigkeitsansätzen diskretisiert. Mit der Zeitschrittweite $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ folgt die Courant-Zahl $C = 0,8$. Die in Bild 2.16 dargestellten Zeitverläufe der Verschiebungen in den Punkten A und B zeigen – wie zuvor im Dehnstab-Beispiel – für die stabilisierte Formulierung keine unphysikalischen Oszillationen, im Vergleich zur reinen ZDG-Formulierung jedoch deutlich abgeflachte Verschiebungsmaxima.

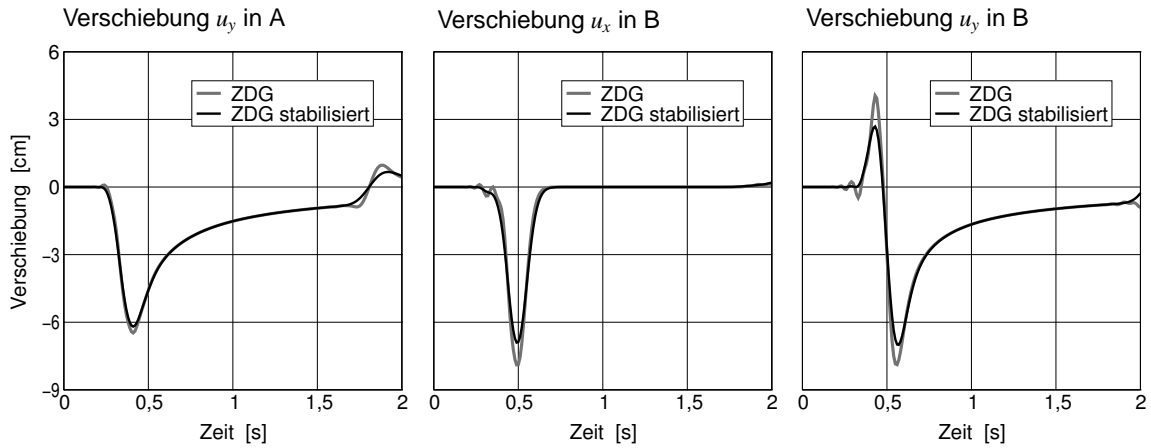


Bild 2.16: Zeitverläufe der Verschiebungen bei $C=0,8$ – 80×80 Elemente

Die Zeitverläufe sowie die Geschwindigkeitsfelder der stabilisierten Formulierung in den Bildern 2.17 und 2.18 zeigen hinsichtlich der Ausbreitungsgeschwindigkeiten eine gute Übereinstimmung mit den analytischen Werten. Über die Genauigkeit der Verschiebungsmaxima in den Wellenfronten ist mangels analytischer Lösung keine quantitative Aussage möglich, jedoch führt die höhere numerische Dämpfung der stabilisierten Formulierung zu deutlich abgeflachten Lösungen. Die zu erwartenden Wellenausbreitungsphänomene einschließlich Reflektion der verschiedenen Wellen an den Rändern werden aber in beiden Fällen richtig abgebildet.

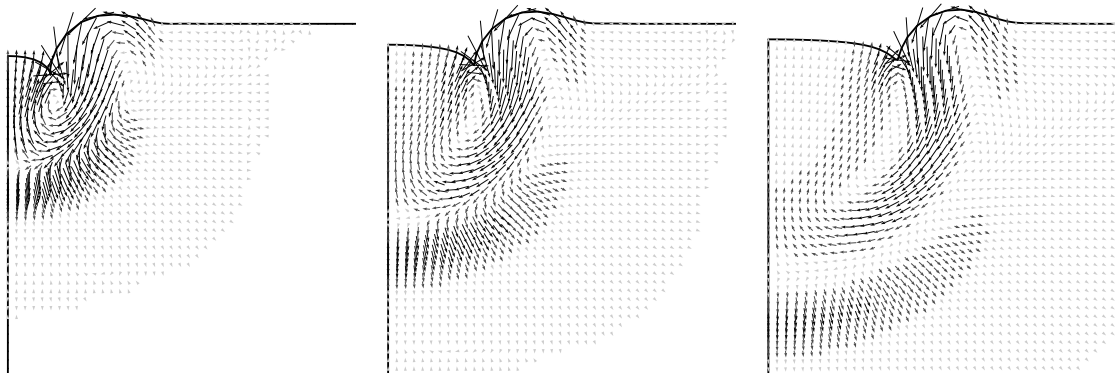


Bild 2.17: Geschwindigkeitsfelder für $t=0,3$ s, $t=0,4$ s und $t=0,5$ s

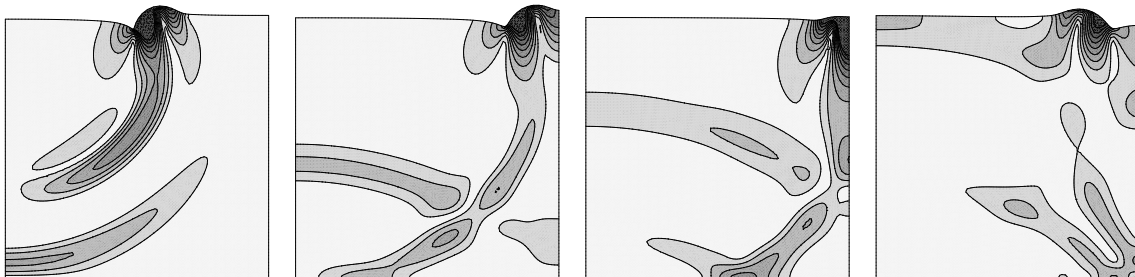


Bild 2.18: Geschwindigkeitsbeträge für $t=1,0$ s, $t=1,5$ s, $t=1,7$ s und $t=2,0$ s

2.4.4 Einachsig gespannte Membran unter Eigengewicht

Eine an zwei Seiten auf gleicher Höhe unverschieblich gelagerte, einachsig gespannte Membran, die mit der Seiltheorie beschreibbar ist, dient als vereinfachendes zweidimensionales Modell einer nur durch das Eigengewicht vorgespannten Membran-Dachkonstruktion. Das strukturdynamische System wird in Kapitel 6 mit einem überströmenden viskosen Fluid gekoppelt, um Wechselwirkungen zwischen Membrandach und Windanströmung zu untersuchen.

Für die Analyse der Membran- bzw. Seildynamik mit der Finite-Element-Methode bietet sich die Verwendung von im gekrümmten Seilkoordinatensystem formulierten Dehnstabelementen an. Im folgenden kommt jedoch die in Abschnitt 2.3.6 vorgestellte zweidimensionale Kontinuumsformulierung zum Einsatz, um die Leistungsfähigkeit der Methode zu demonstrieren und bei der späteren Kopplung mit der Strömung eine einheitliche Formulierung für beide Kontinua zu erhalten. Die Simulation erfolgt mit einer feinen Elementierung mit 2000 Elementen, wobei zwei Elemente über die Höhe vorhanden sind und die Lagerung auf halber Höhe erfolgt, sowie mit einer gröberen Elementierung mit 100 Elementen, bei welcher die Membran am oberen Rand gelagert ist. Die Abmessungen und die beiden Diskretisierungen sind in Bild 2.19 dargestellt.

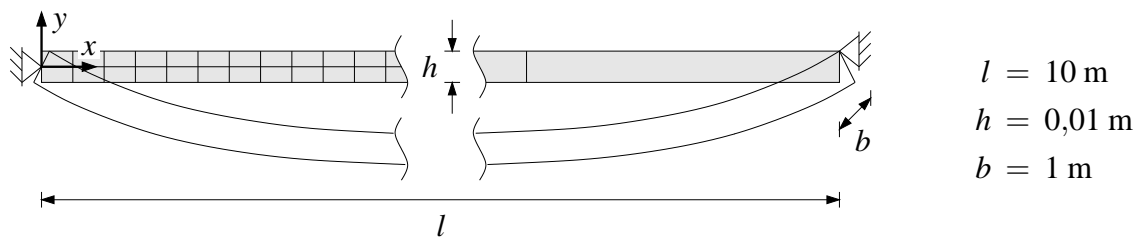


Bild 2.19: Systemskizze der einachsig gespannten Membran unter Eigengewicht

Ausgehend vom unbelasteten Zustand, in dem sich die Membran in horizontaler Lage befindet, erfolgt die Einprägung des Eigengewichtes $\rho_0 \mathbf{b}_0$ mit der Laststeigerungsfunktion $\gamma(t)$, bis die Belastung mit der Massenträgheit ρ_0 übereinstimmt. Der in Bild 2.20 gezeigte Funktionsverlauf entspricht bis zum Zeitpunkt $t = 10 \text{ s}$ einer quadratischen Parabel und nimmt anschließend den konstanten Wert 1,0 an.

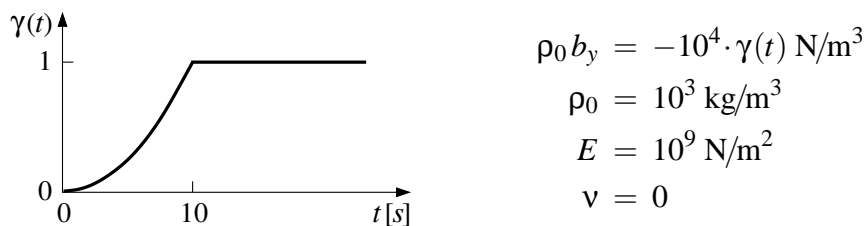


Bild 2.20: Laststeigerungsfunktion und Materialparameter der Membran

Die Wahl der Laststeigerungsfunktion führt zu Schwingungsamplituden, die deutlich kleiner sind, als der statische Durchhang, so daß im vollbelasteten Zustand die geometrische Nichtlinearität nur geringen Einfluß auf die Schwingungen um die statische Ruhelage hat und die Frequenzen mit den Eigenfrequenzen der linearisierten Theorie des schwach durchhängenden Seils, siehe Petersen [55], verglichen werden können.

Für die Bestimmung der statischen Ruhelage findet die zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Formulierung mit konstanten Zeitansätzen Verwendung, womit die Zeitintegration nur von erster Ordnung genau ist und dem stark dissipativen Euler-Rückwärts-Verfahren entspricht. In Verbindung mit einer auf $0,1 \rho_0$ reduzierten Massenträgheit werden alle Oszillationen herausgedämpft, so daß sich innerhalb von zwei Sekunden nach Aufbringung des vollen Eigengewichts die Ruhelage einstellt. Bild 2.21 zeigt für beide Diskretisierungen die Zeitverläufe bei konstanten Zeitansätzen und reduzierter Massenträgheit sowie bei linearen Ansätzen.

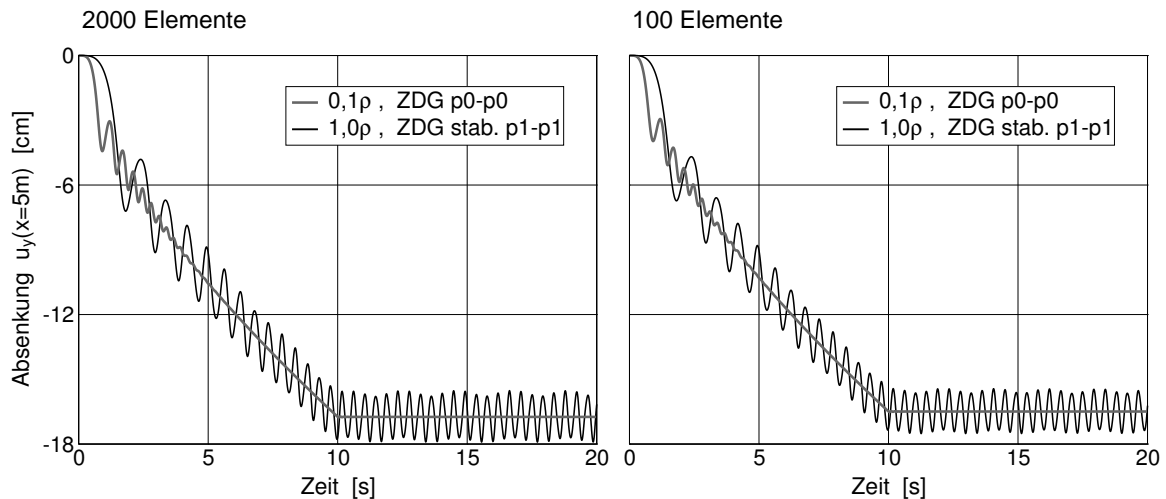


Bild 2.21: Zeitverläufe des Durchhangs in Systemmitte bei Laststeigerung

Die Berechnungen mit der Zeitschrittweite $\Delta t = 0,005$ s erfolgen unter Verwendung der stabilisierten Formulierung, die jedoch keinen sichtbaren Einfluß auf die Lösung hat. Im Falle der reduzierten Massenträgheit kommt bei der iterativen Lösung einer Zeitscheibe mit dem Picard-Verfahren eine Unterrelaxation der Verschiebung mit dem 0,3-fachen Wert des vorhergehenden Iterationsschritts zum Einsatz, was zu verbesserten Konvergenzeigenschaften des Verfahrens führt.

Ein Vergleich der beiden Diskretisierungen zeigt qualitativ sehr ähnliche Ergebnisse, wobei die statische Ruhelage bei 100 Elementen eine geringfügig kleinere Absenkung aufweist. Um die Form der statischen Ruhelage zu beurteilen, wird die analytische Lösung der Seil-Differentialgleichung nach Szabó [74] an Horizontalkraft und

Durchhang der feinen Elementierung angepaßt. Der analytische Verlauf der Absenkung $u_y(x) = 74,699 \text{ m} \cdot \cosh(0,013387 \text{ m}^{-1} (x-5 \text{ m})) - 74,867 \text{ m}$ gilt für ein auf die Seillänge bezogenes Eigengewicht von $g = 99,827 \text{ N/m}$ im verformten Zustand und ist in Bild 2.22 den numerischen Lösungen gegenübergestellt.

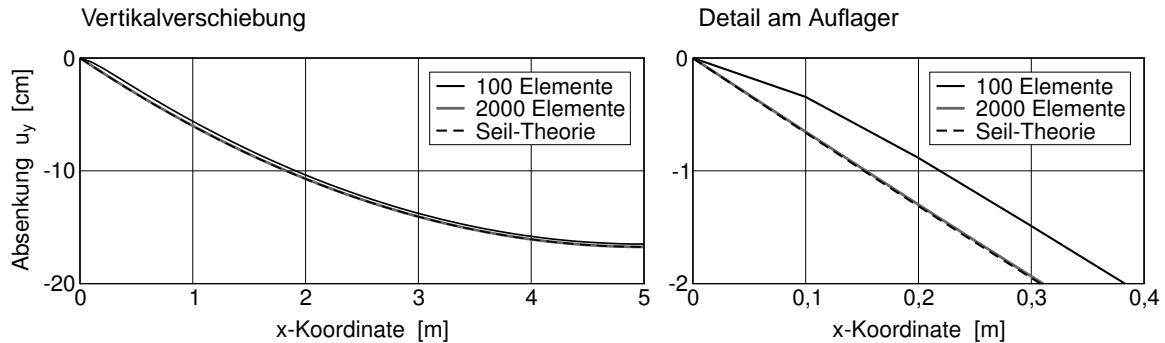


Bild 2.22: Statische Ruhelagen für beide Elementierungen und Vergleich mit der Seiltheorie

Die analytische Seillinie ist fast deckungsgleich mit der numerischen Lösung für 2000 Elemente. Der Ausschnitt auf der rechten Seite von Bild 2.22 zeigt, daß die Abweichung der größeren Elementierung größtenteils eine Folge der veränderten Lagerung am oberen Rand ist, die zu Biegebeanspruchungen in der Nähe der Auflager führt. In hinreichender Entfernung vom Auflager bildet das Berechnungsmodell auch mit der größeren Diskretisierung das statische Tragverhalten eines Seils gut ab.

Zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens werden die in Bild 2.21 dargestellten Zeitverläufe des Durchhangs nach Erreichen des vollbelasteten Zustands, also für $t > 10 \text{ s}$, einer schnellen Fourier-Transformation unterzogen. Die in Bild 2.23 für beide Elementierungen dargestellten Amplitudenspektren des Durchhangs in der Mitte der Membran stimmen in der Grundfrequenz genau überein und liegen insgesamt sehr nah beieinander.

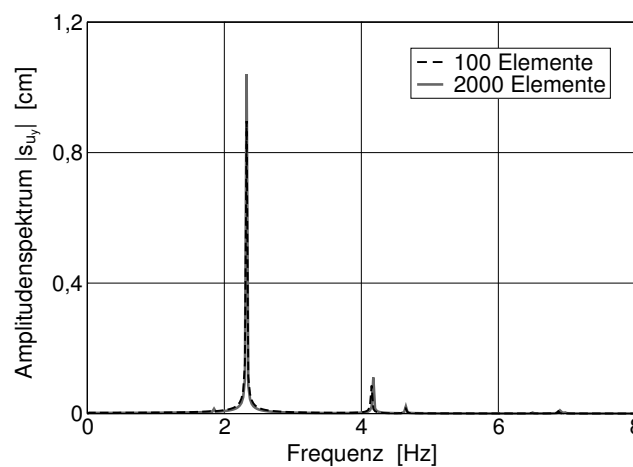


Bild 2.23: Amplitudenspektrum des Durchhangs in Systemmitte bei voller Massenbelegung

Vergleicht man die Lagen der Maxima der Amplitudenspektren mit den Eigenfrequenzen der symmetrischen Schwingungsformen bei Anwendung einer linearisierten Schwingungstheorie von Seilen mit geringem Durchhang und kleinen Schwingungsamplituden nach [55], so zeigt sich ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung. Die ersten drei Eigenfrequenzen der analytischen Lösung $f_1^s = 2,32 \text{ Hz}$, $f_2^s = 4,17 \text{ Hz}$ und $f_3^s = 6,85 \text{ Hz}$ sind auch in den Spektren der FE-Lösungen deutlich erkennbar. Das zusätzliche kleine Maximum in den Frequenzspektren beim zweifachen Wert der Grundfrequenz ist Folge der geometrisch nichtlinearen Formulierung und entsteht infolge der unterschiedlichen Systemsteifigkeit bei Auslenkungen ober- bzw. unterhalb des statischen Durchhangs, so daß der Zeitverlauf der Auslenkung von der Sinusform abweicht.

Insgesamt ermöglicht die in diesem Kapitel vorgestellte Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik auch die realitätsnahe Simulation des statischen und dynamischen Tragverhaltens von einachsigen gespannten Membranen bzw. Seilen. Die Modellierung mit Kontinuumsselementen erscheint zunächst unangemessen, ist aber im Hinblick auf eine konsistente Kopplung mit umströmenden Fluiden von Vorteil, und die Berechnungsbeispiele zeigen, daß auch die gröbere Diskretisierung mit 100 Elementen die Membran- bzw. Seildynamik gut beschreiben kann.

3. Strömungsmechanik inkompressibler viskoser Fluide

3.1 Einführung in die Strömungsmechanik

Aufgabe der Strömungsmechanik ist die Beschreibung und Untersuchung der Bewegung von Fluiden sowie die Bestimmung von Druck- bzw. Spannungsverteilungen in Fluiden und auf deren Grenzflächen. Fluide sind hierbei Kontinua, also Körper mit einer in Raum und Zeit kontinuierlichen Massenbelegung, die in Ruhelage äußeren Schubspannungen keinen Widerstand entgegensetzen, so daß die zugehörigen Verformungen beliebig groß werden können. Kontinuumsmodelle für Fluide finden zur Beschreibung von Flüssigkeiten und Gasen Verwendung, wenn die zu beschreibenden Phänomene eine makroskopische Betrachtung erlauben und die Teilchendichte ausreichend hoch ist. Die folgende Zusammenstellung verschiedener Einflüsse, die das Strömungsverhalten maßgeblich bestimmen, dient der Auswahl eines für Aufgaben der Bauwerksaeroelastik geeigneten Strömungsmodells. Detaillierte Darstellungen der verschiedenen Einflüsse und daraus abgeleiteter Strömungsmodelle finden sich z. B. in [80, 68, 16].

3.1.1 Charakterisierung von Strömungsvorgängen

Reibungseinfluß und Turbulenz. Die Vernachlässigung innerer Reibung führt zu idealen, reibungsfreien Fluiden, in denen keine Schubspannungen auftreten. In viskosen, reibungsbehafteten Fluiden dagegen hängen Schubspannungen vom Geschwindigkeitsgradienten ab. Bei Newtonschen Fluiden besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Schubspannung und Geschwindigkeitsänderung senkrecht zur Strömungsrichtung. Strömungen mit innerer Reibung sind dissipativ, d. h. mechanische Energie wird irreversibel in Wärme umgewandelt. Der Reibungseinfluß ist verantwortlich für die Bildung von Grenzschichten und die Ablösung von Wirbeln an Oberflächen angeströmter Körper und verursacht Strömungswiderstände bei der Umströmung. Bewegungen reibungsbehafteter Fluide können zu laminaren oder turbulenten Strömungen führen, wobei anfänglich laminare auch in turbulente Bewegungen umschlagen können. Im Gegensatz zu laminaren Strömungen, bei denen sich parallel zueinander bewegende Schichten nicht vermischen und die Bahnlinien der Strömungsteilchen tangential zum Stromfaden verlaufen, sind turbulente Strömungen durch

zeitlich und räumlich ungeordnete Schwankungsbewegungen der Strömungsteilchen gekennzeichnet. Die Schwankungsbewegungen, die aus Wirbeln unterschiedlichster Größenordnungen bestehen, verursachen einen starken Austausch von Masse, Impuls und Energie. Die mechanische Energie wird auf immer kleinere Wirbel übertragen und letztendlich dissipiert. Im Vergleich zu laminaren Strömungen sind daher Reibungsverluste und auch Schubspannungen an festen Wänden, an denen die Schwankungsbewegungen zur Ruhe kommen, deutlich größer. Obwohl die Schwankungsbewegungen hochgradig instationär sind, kann das über einen ausreichenden Zeitraum gemittelte Geschwindigkeitsfeld einer turbulenten Strömung stationäres oder periodisches Verhalten annehmen. Meistens weicht das gemittelte Strömungsfeld jedoch deutlich vom laminaren Fall ab. Ob sich in einer bestimmten Strömungssituation eine laminare oder turbulente Bewegung einstellt, legt das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungseinfluß fest. Bei vorherrschender viskoser Reibung ist die Bewegung laminar, dominanter Trägheitseinfluß dagegen führt zu Turbulenzen. Die bestimmende Kennzahl für den Reibungseinfluß ist die Reynolds-Zahl

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\mu}, \quad (3.1)$$

die das Verhältnis von Massenträgheiten zu viskosen Reibungskräften angibt. Darin ist ρ die Dichte und μ die dynamische Viskosität des Fluids. Die Geschwindigkeit v und die Länge l sind charakteristische Werte der betrachteten Strömungssituation. Strömungen mit gleichen Reynolds-Zahlen verhalten sich hinsichtlich des Reibungseinflusses ähnlich. Laminare Strömungen besitzen i. allg. kleine Reynolds-Zahlen. Oberhalb einer kritischen Reynolds-Zahl, die von der betrachteten Strömungssituation abhängt, bildet sich eine turbulente Strömung. Unter idealen Bedingungen kann der laminar-turbulente Umschlag bei deutlich höheren Reynolds-Zahlen erfolgen als bei leicht gestörten Systemen, vergleichbar mit der Imperfektionssensitivität struktureller Stabilitätsprobleme.

Schwerkrafteinfluß. Der Einfluß der Gravitation ist in erster Linie bei Flüssigkeitsströmungen mit freien Oberflächen von Bedeutung, insbesondere wenn das Strömungsverhalten von Schwerwellen geprägt ist. Bei strömenden Gasen dagegen ist der Schwerkrafteinfluß meist von untergeordneter Bedeutung und kann z. B. bei Windumströmungen von Bauwerken vernachlässigt werden. Die bestimmende Kennzahl für den Schwerkrafteinfluß ist die Froude-Zahl

$$\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{g l}}, \quad (3.2)$$

die das Verhältnis von kinetischer zu potentieller Energie angibt. Darin ist g die Fallbeschleunigung infolge eines Gravitationsfeldes. Strömungen mit gleichen Froude-Zahlen verhalten sich hinsichtlich des Schwerkrafteinflusses ähnlich.

Dichteeinfluß. Druck- oder Temperaturänderungen führen bei realen Fluiden generell zu Dichteänderungen. Jedoch können insbesondere Flüssigkeiten in vielen Fällen als dichtebeständig angenommen werden, wenn nur geringe Temperaturänderungen auftreten. Anstatt der Bezeichnung dichtebeständig wird im folgenden der Begriff inkompressibel verwendet, auch wenn dieser dem Wortlaut nach temperaturbedingte Dichteänderungen nicht ausschließt. Die bestimmende Kennzahl für die Ähnlichkeit von Strömungen hinsichtlich des Dichteeinflusses ist die Mach-Zahl

$$\text{Ma} = \frac{v}{c}, \quad (3.3)$$

die das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit c im Fluid angibt. Bei Mach-Zahlen von $\text{Ma} < 0,3$ kann man strömende Fluide, auch Gase, in guter Näherung als inkompressibel annehmen, da das Strömungsverhalten von in diesem Fall sehr kleinen Dichteänderungen kaum beeinflusst wird, siehe z. B. [80]. Dies gilt u. a. für die in dieser Arbeit behandelten Windströmungen. Bei kleinen Mach-Zahlen mit $\text{Ma} < 1$ handelt es sich um Unterschallströmungen, im Gegensatz zu Überschallströmungen mit $\text{Ma} > 1$, die eine grundsätzlich andere Phänomenologie besitzen.

Wärmeeinfluß. Die Temperatur kann Einfluß auf Fluideigenschaften wie Dichte oder Viskosität haben. Andererseits sind mechanische Reibungsphänomene dissipativ und führen zu Temperaturerhöhungen, die thermodynamische Zustandsänderungen zur Folge haben. Neben der Formulierung von Massen- und Impulsbilanz kann dann auch im inkompressiblen Fall die Betrachtung der Energiebilanz notwendig sein, um das Strömungsverhalten zu beschreiben. Dabei gibt die Péclet-Zahl

$$\text{Pe} = \frac{vl}{\kappa} \quad (3.4)$$

in Analogie zur Reynolds-Zahl bei viskosen Strömungen das Verhältnis von konvektivem zu diffusivem Wärmestrom an, wobei κ der Diffusionskoeffizient ist. Die Péclet-Zahl gilt in gleicher Weise für Transportvorgänge von z. B. Schadstoffen, die sich in Strömungen ausbreiten und durch Konvektions-Diffusions-Gleichungen beschrieben werden. In vielen Fällen, wie z. B. bei Windumströmungen von Bauwerken, treten nur geringe Temperaturänderungen im Strömungsgebiet auf, so daß temperaturbedingte Viskositäts- oder Dichteänderungen vernachlässigbar sind. Dann können bei inkompressiblen Fluiden die das Strömungsverhalten beschreibenden mechanischen Zustandsvariablen wie Geschwindigkeit und Druck unabhängig von thermodynamischen Größen bestimmt werden. Die Ermittlung des Temperaturfeldes erfolgt durch die zusätzliche Formulierung des Wärmetransports.

Instationarität. Das Zeitverhalten von Strömungsvorgängen ist stationär, wenn sich das Strömungsfeld in der Zeit nicht ändert, periodisch stationär, wenn sich Strömungsphänomene mit gleicher Intensität regelmäßig wiederholen, transient, wenn

der Zeitverlauf veränderlich ist, und chaotisch, wenn völlig unregelmäßige Zeitverläufe auftreten. So zeigen turbulente Strömungen bei Auflösung aller Zeitskalen chaotisches Verhalten, das bei Betrachtung von statistisch gemittelten Beschreibungsvariablen in vielen Fällen als stationär oder periodisch stationär anzusehen ist. Daneben können z. B. im Fall der Kármánschen Wirbelstraße laminare Zylinderumströmungen trotz gleichmäßiger Anströmung periodisch stationäres Verhalten aufweisen. Veränderliche Anströmungen, aber auch Anfachungsphänomene infolge Fluid-Struktur-Interaktion führen zu transientem Zeitverhalten. Als dimensionsloses Maß für die Instationarität einer Strömung dient die Strouhal-Zahl

$$\text{St} = \frac{l}{vt_c}, \quad (3.5)$$

die als Verhältnis von instationären zu stationären Trägheitskräften gedeutet werden kann, wobei t_c eine charakteristische Zeit der instationären Bewegung ist. Bei periodisch stationären Bewegungen wird für die charakteristische Zeit die Periodendauer T eingesetzt. Für stationäre Strömungen gilt $\text{St} = 0$. Die Strouhal-Zahl dient als Kennzahl für die Ähnlichkeit von Strömungen hinsichtlich der Instationarität.

3.1.2 Modellgleichungen für Strömungen

Ausgangspunkt für analytische Lösungen sowie numerische Simulationen von Strömungen sind Modellgleichungen zur mathematischen Beschreibung des physikalischen Verhaltens. Hierzu werden die als fundamentale physikalische Prinzipien anzusehenden Erhaltungssätze für Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie als kontinuumsmechanische Bilanzgleichungen formuliert.

Im Gegensatz zur Lagrangeschen Betrachtungsweise der Strukturmechanik in Abschnitt 2.3, bei der die Formulierung der Erhaltungssätze an materiellen Kontinuums-elementen erfolgt, findet in der Strömungsmechanik in der Regel die räumliche bzw. Eulersche Betrachtungsweise Verwendung, bei der die Erhaltungssätze für raumfeste Volumenelemente aufgestellt werden. Während bei der Lagrangeschen Methode jedes Kontinuumselement auf seiner Bahn durch den Raum verfolgt wird, was für viele Strömungen kaum möglich ist, beschreibt die Eulersche Methode nur die Bewegung der Teilchen, die das aus den betrachteten Volumenelementen bestehende Kontrollvolumen aktuell durchströmen. Verändert sich das betrachtete Kontrollvolumen mit der Zeit, z. B. infolge beweglicher Ränder, ist zusätzlich die Bewegung aller Volumenelemente zu berücksichtigen, was zur relativen bzw. parametrischen Betrachtungsweise führt, die die Methoden nach Lagrange und Euler als Spezialfälle mit einschließt. Wie bei der Eulerschen Methode erscheinen bei der im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten relativen Betrachtungsweise alle Zustandsvariablen einschließlich der Bewegungsgrößen als Funktionen des Ortes und der Zeit, wobei das

betrachtete räumliche Gebiet und folglich die Ortskoordinaten der differentiellen Elemente des Kontrollvolumens zusätzlich von der Zeit abhängen.

Die folgende Auflistung verschiedener Modelle zur Beschreibung von Strömungen unterscheidet sich hinsichtlich der Berücksichtigung der im letzten Abschnitt vorgestellten Einflüsse auf das Strömungsverhalten und ist nach zunehmender Komplexität der Modellgleichungen geordnet.

Potentialströmung. Die Annahme rotationsfreier Geschwindigkeitsfelder, die auch sämtliche Reibungsphänomene ausschließt, führt auf ein vereinfachtes Strömungsmodell, das den Massenerhalt mit der Laplace-Gleichung für ein skalares Geschwindigkeitspotential beschreibt und daher die Bezeichnung Potentialströmung trägt. Die nachträgliche Auswertung der zur Bernoulli-Gleichung aufintegrierten Impulsbilanz bestimmt die Druckverteilung. Potentialströmungen erlauben die näherungsweise Bestimmung von Geschwindigkeitsfeldern bei der Umströmung stromlinienförmiger Körper, können aber keine Strömungswiderstände vorhersagen. Instationäre rotationsfreie Strömungsmodelle finden in der Akustik Verwendung, wenn nur kleine Schwingungsbewegungen der Strömungsteilchen von Interesse sind.

Euler-Gleichungen. Die Euler-Gleichungen beschreiben Strömungen reibungsfreier, nicht wärmeleitender Fluide und sind als Grenzfall der Navier-Stokes-Gleichungen für $Re \rightarrow \infty$ anzusehen. Einsatz finden sie bei sehr hohen Strömungsgeschwindigkeiten, z. B. im Bereich der Flugzeugaerodynamik, wenn der Reibungseinfluß auf dünne Grenzschichten an Oberflächen umströmter Körper beschränkt bleibt und ggf. zusätzlich modelliert wird. Die Modellgleichungen bestehen aus einem System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen zur Formulierung der Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie zuzüglich einer thermischen Zustandsgleichung für das Fluid. Berücksichtigt werden Dichteänderungen, Schwerkräfteinflüsse und Instationaritäten. Die Vernachlässigung zeitabhängiger Terme führt zu einer vereinfachenden Formulierung für stationäre Aufgabenstellungen.

Navier-Stokes-Gleichungen. Die mathematische Beschreibung von Strömungsvorgängen unter Berücksichtigung aller in Abschnitt 3.1.1 angegebenen Einflüsse erfolgt durch Formulierung der vollständigen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie zuzüglich einer thermischen Zustandsgleichung für das Fluid. Die Bezeichnung Navier-Stokes-Gleichungen bezog sich ursprünglich nur auf die Impulsbilanz reibungsbehafteter Fluide, wird in neuerer Literatur aber auf den vollständigen Satz von Bilanzgleichungen angewendet. Die in vielen technischen Anwendungen sinnvolle Annahme dichtebeständiger aber viskoser Fluide führt zu den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, bestehend aus Massen- und Impulsbilanz. Der Satz nichtlinearer partieller Differentialgleichungen bildet ein vollständiges System zur Bestimmung von Strömungsgeschwindigkeiten und Druckfeld. Der Grenzfall

$Re \rightarrow 0$, der den Einfluß von Trägheitskräften nicht berücksichtigt, führt auf ein als Stokes-Gleichungen bezeichnetes System linearer partieller Differentialgleichungen. Anwendungsgebiete sind Kriechströmungen hochviskoser Fluide, bei denen vorrangig Reibungsphänomene auftreten.

3.1.3 Modellierung turbulenter Strömungen

Direkte numerische Simulation. Die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben im kompressiblen wie im inkompressiblen Fall sowohl laminare als auch turbulente Strömungsvorgänge. Für die scheinbar chaotischen Bewegungen turbulenter Strömungen ist der nichtlineare, die konvektive Zeitableitung beinhaltende Trägheitsterm verantwortlich. Jedoch ist die Auflösung aller räumlichen und zeitlichen Skalen turbulenter Strömungen auch bei Verwendung effizienter numerischer Methoden in Verbindung mit Höchstleistungsrechnern nur in Ausnahmefällen möglich. Diese als direkte numerische Simulation (DNS) bezeichnete Vorgehensweise erfordert ein dreidimensionales räumliches Gitter mit etwa $N \approx Re^{9/4}$ Knoten bzw. Gitterpunkten, da turbulente Strömungen generell dreidimensional ausgeprägt sind und auch die kleinsten turbulenten Wirbel noch aufgelöst werden müssen, siehe [84, 62, 16]. Die räumliche und zeitliche Diskretisierung gelingt nur für moderate Reynolds-Zahlen unter sehr hohem numerischen Aufwand und soll Aufschluß über Eigenschaften und Struktur der Turbulenz geben. Eine zusätzliche Schwierigkeit ist die Formulierung realistischer Rand- und Anfangsbedingungen, die bei turbulenten Strömungssituationen in der Regel unbekannt sind. Insbesondere Einstrom- aber auch Anfangsbedingungen können das Ergebnis einer Simulation entscheidend beeinflussen.

Grobstruktur-Simulation. Eine Möglichkeit, den numerischen Aufwand direkter numerischer Simulationen zu reduzieren, ist die Grobstruktur-Simulation, im englischen Sprachraum „large eddy simulation“ (LES) genannt, siehe [16, 62, 84]. Von den Schwankungsbewegungen unterschiedlicher Größenordnung werden nur die größeren Skalen in Raum und Zeit aufgelöst, während die Berücksichtigung der kleinen Skalen durch zusätzliche Modellannahmen erfolgt. Die Motivation für dieses Vorgehen ist in der Struktur der Turbulenz begründet, da die grobskaligen Bewegungen den größten Teil an kinetischer Energie beinhalten, z. T. unregelmäßig wiederkehrende kohärente Strukturen bilden und verantwortlich für den starken Austausch von Masse, Impuls und Energie sind. Die feinskaligen, stark dissipativen Bewegungen dagegen sind weitgehend isotrop und homogen und tragen kaum zum Transport der Erhaltungsgrößen bei. Als Filter zur Trennung der feinskaligen Bewegungen von den in der Simulation aufgelösten groben Skalen dient üblicherweise das Rechengitter, womit die Wahl der Gitterabstände das Ergebnis der Simulation entscheidend beeinflussen kann. Die Feinstrukturmodelle zur Beschreibung der vom Rechengitter nicht

mehr aufgelösten Skalen sollen in erster Linie dissipative Effekte berücksichtigen. Gegenüber den in Verbindung mit den Reynolds-Gleichungen eingesetzten Turbulenzmodellen, die den Einfluß aller turbulenten Schwankungsbewegungen modellieren müssen, können die Feinstrukturmodelle vergleichsweise einfach aufgebaut sein. Meist bestehen sie nur aus algebraischen Gleichungen. Grobstruktur-Simulationen unterliegen kaum Einschränkungen hinsichtlich der Anwendbarkeit auf verschiedene turbulente Strömungen, müssen jedoch generell dreidimensional und instationär sein, um die gröberen turbulenten Skalen in Raum und Zeit aufzulösen. Der numerische Aufwand ist immer noch sehr hoch, so daß die Anwendung auf technisch interessante Aufgaben wie die Umströmung ganzer Flugzeuge oder weitgespannter Brücken momentan nicht möglich ist. Auch führt die hohe zeitliche Auflösung zu sehr großen Datenmengen, die einer nachträglichen statistischen Mittelung bedürfen, um die Ergebnisse etwa zur Formoptimierung oder Bemessung von Bauteilen einzusetzen. Die Formulierung geeigneter Rand- und Anfangsbedingungen bereitet wie bei direkten numerischen Simulationen erhebliche Schwierigkeiten, wobei hier die Behandlung fester Wände zusätzliche Annahmen erfordert, wenn die in diesem Bereich maßgebende feinskalige Turbulenz nicht aufgelöst wird.

Reynolds-Gleichungen. Da in vielen technischen Anwendungsfällen oft nur mittlere Strömungskräfte oder Geschwindigkeiten von Interesse sind und viele turbulente Strömungen statistisch gesehen stationäres oder periodisches Verhalten aufweisen, ist die Aufteilung der Beschreibungsvariablen in Mittelwert und Schwankungsanteil ein vielversprechender Ansatz. Die Formulierung von Bestimmungsgleichungen für gemittelte Strömungsgrößen in Verbindung mit zusätzlichen Modellannahmen für die Schwankungsanteile führt auf die Reynolds-Gleichungen. Wie die englische Bezeichnung „Reynolds averaged Navier-Stokes (RANS) Equations“ ausdrückt, können die Reynolds-Gleichungen als statistisch gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen aufgefaßt werden. Formaler Unterschied im inkompressiblen Fall ist nur ein zusätzlicher Term in der Impulsbilanz, der die Trägheitskräfte der Schwankungsbewegungen berücksichtigt und als Reynolds-Spannungstensor bezeichnet wird. Die Bezeichnung Reynolds-Spannungen deutet an, daß der Einfluß auf das Bewegungsverhalten der mittleren Strömung ähnlich dem viskoser Schubspannungen ist. Da die Komponenten des Reynolds-Spannungstensors unbekannt sind, bilden die Reynolds-Gleichungen keinen geschlossenen Gleichungssatz. Die zur Schließung notwendigen zusätzlichen Gleichungen, die auf heuristischer Basis einen Zusammenhang zwischen Reynolds-Spannungen und mittleren Strömungsgrößen formulieren, bilden das Turbulenzmodell, siehe z. B. [84, 62, 68, 16, 80].

Die meisten Turbulenzmodelle basieren auf der als Boussinesq-Approximation bezeichneten Annahme einer Wirbelviskosität als Proportionalitätsfaktor zwischen

Reynolds-Spannungen und mittlerem Geschwindigkeitsgradienten. Der Ansatz entspricht der konstitutiven Beziehung Newtonscher Fluide mit dem Unterschied, daß die Wirbelviskosität μ_t im Gegensatz zur molekularen Viskosität μ keine Materialeigenschaft ist, sondern von der Struktur der Turbulenz abhängt. Daher ist der räumliche und zeitliche Verlauf der Wirbelviskosität unbekannt und muß mit zusätzlichen, vom Turbulenzmodell zur Verfügung gestellten Modellgleichungen bestimmt werden. Hierzu ist aus Dimensionsgründen die Ermittlung bzw. Abschätzung eines Geschwindigkeits- und eines Längenmaßes der turbulenten Schwankungsbewegung erforderlich. Anzahl und Komplexität der verwendeten Modellgleichungen ermöglichen eine Einteilung der Turbulenzmodelle.

Algebraische Modelle verwenden nur algebraische Gleichungen, Ein-Gleichungs-Modelle dagegen auch eine partielle Differentialgleichung, meist eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k , die als turbulentes Geschwindigkeitsmaß dient. Beide Modelltypen benötigen zusätzlich empirische Informationen zur Beschreibung der Turbulenz, so daß der Einsatz auf einfache Strömungssituationen wie Rohrströmungen oder anliegende Plattengrenzschichten beschränkt bleibt. Erst die Verwendung von Zwei-Gleichungs-Modellen mit einer zweiten partiellen Differentialgleichung für ein turbulentes Längenmaß ermöglicht die Simulation komplexer turbulenter Strömungen ohne zusätzliche Informationen über die Struktur der Turbulenz, d. h. die Modelle sind vollständig. Die weiteste Verbreitung genießt das k - ϵ -Modell nach Jones und Launder [38] mit Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie und die turbulente Dissipationsrate ϵ , die das Längenmaß ersetzt. Daneben wird insbesondere in der Aerodynamik häufig das neuere k - ω -Modell nach Wilcox [84] eingesetzt, bei dem die zweite Transportgleichung für die spezifische Dissipationsrate $\omega \sim \epsilon/k$ formuliert wird. Im Gegensatz zum Standard- k - ϵ -Modell ist die Integration der Modellgleichungen auch an festen Wänden möglich, womit auf die zusätzliche Auswertung von Wandfunktionen verzichtet werden kann. In wandnahen Bereichen und insbesondere bei Grenzschichtströmungen mit Druckanstieg ist das k - ω -Modell vielen anderen Zwei-Gleichungs-Modellen überlegen, siehe [84].

Jedoch liefern auf der Boussinesq-Approximation basierende Turbulenzmodelle für Strömungen über gekrümmte Oberflächen oder mit Grenzschichtablösungen sowie für komplexe dreidimensionale Strömungen meist unbefriedigende Ergebnisse [84]. Mögliche Alternativen sind nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle oder Reynolds-Spannungs-Modelle, die nichtlineare partielle Differentialgleichungen für alle Komponenten des Reynolds-Spannungstensors formulieren. Daß auch diese Modelle nicht in allen Fällen befriedigende Ergebnisse liefern und zudem mathematisch äußerst komplex sind, deutet auf generelle Schwierigkeiten bei der Modellierung der in turbulenten Strömungen auftretenden Phänomene hin.

3.1.4 Strömungsmodelle in der Bauwerksaeroelastik

Der natürliche Wind ist eine durch barometrische Druckunterschiede hervorgerufene atmosphärische Luftströmung, wobei alle atmosphärischen Vorgänge letztendlich auf die veränderliche Sonneneinstrahlung sowie die Erdrotation zurückzuführen sind. An der Erdoberfläche bildet sich eine turbulente Grenzschicht, die je nach Bodenrauigkeit eine Höhe von 300 m bis 500 m erreicht. Damit befinden sich alle erdgebundenen Bauwerke in der durch starke Geschwindigkeitsschwankungen (Böen) gekennzeichneten atmosphärischen Grenzschicht.

Als maximale Windgeschwindigkeit in 20 bis 100 m Höhe über Grund ist nach DIN 1055 Teil 4 [11] der Rechenwert $v = 42 \text{ m/s}$ anzusetzen. In exponierten Berglagen können Orkanböen mit Wiederkehrperioden von 50 Jahren auch maximale Windgeschwindigkeiten von $v = 60 \text{ m/s}$ in 15 m Höhe über Grund erreichen, siehe [64]. Mit der Schallgeschwindigkeit von $c = 330 \text{ m/s}$ für Luft folgt eine maximale Mach-Zahl von $Ma = 0,18$, womit die Annahme der Inkompressibilität für Aufgaben der Bauwerksaerodynamik zulässig ist, da atmosphärische Temperaturschwankungen in strömungsrelevanten Zeitskalen vernachlässigbar sind. Unter Voraussetzung einer konstanten Temperatur von $T = 20^\circ\text{C}$ und eines atmosphärischen Ruhedrucks von $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ folgen für Dichte und dynamische Viskosität der Luft die konstanten Werte $\rho_{\text{Luft}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ und $\mu_{\text{Luft}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$, siehe [18, 70]. Damit liegen die Reynolds-Zahlen in der Bauwerksaerodynamik zwischen $Re \approx 10^4$ für Abspannseile und $Re \approx 10^8$ für hohe Gebäude oder Brückenträger.

Turbulenzeffekte in der Anströmung und infolge der Umströmung von Bauwerken können das Strömungsverhalten und die auf die Bauwerke wirkenden Strömungskräfte entscheidend beeinflussen. Der Reibungseinfluß ist auch für Strömungsablösungen und Wirbelbildungen verantwortlich, die bei prismatischen Baukörpern zu periodischen Anregungen führen und im Nachlauf Wirbelstraßen entstehen lassen. Bei scharfkantigen Gebäuden oder Brückenträgern hat die Reynolds-Zahl allerdings untergeordneten Einfluß auf Wirbelablösephänomene, da die Kanten den Ort der Ablösung vorgeben. Die als dimensionsloses Maß für die Ablösefrequenz dienende Strouhal-Zahl ist in diesem Fall nahezu unabhängig von der Reynolds-Zahl. Besitzen die Körper jedoch gekrümmte Oberflächen oder stromlinienähnliche Formen oder findet ein Wiederanlegen der Strömung in Verbindung mit laminar-turbulentem Umschlag statt [66], so kann eine starke Reynolds-Zahl-Abhängigkeit auftreten.

Realistische Strömungsmodelle zur Untersuchung von Windwirkungen an Bauwerken müssen instationäre Strömungen inkompressibler, viskoser Fluide beschreiben. Schwerkrafteinflüsse haben bei Windströmungen keine Bedeutung. Die mathematische Formulierung erfolgt mit den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen.

Der in vielen Fällen maßgebliche Turbulenzeinfluß kann nur in Ausnahmefällen mit direkten numerischen Simulationen erfaßt werden und erfordert den Einsatz von Turbulenzmodellen. Neben k - ε -Modellen sowie Reynolds-Spannungs-Modellen finden im Windingenieurwesen, zumindest im Bereich der Forschung, in zunehmendem Maße auch Grobstruktur-Simulationen Verwendung, siehe [46, 53]. Die auf den Reynolds-Gleichungen basierenden Modelle liefern für viele Situationen wie Kreiszylinderumströmungen oder komplexe dreidimensionale Gebäudeumströmungen nur unzureichende Ergebnisse, sind aber in vielen kommerziellen CFD-Programmen verfügbar und in der Ingenieurpraxis oft ohne Alternative. Grobstruktur-Simulationen dagegen führen auch in schwierigen Strömungssituationen zu sehr vielversprechenden Ergebnissen, wobei Fragen zu Konvergenzeigenschaften oder Randbedingungen noch nicht hinreichend geklärt sind und der numerische Aufwand sehr hoch ist. So ist die Anwendung auf Windumströmungen von großen Gebäuden oder ganzen Brücken bei realen Reynolds-Zahlen momentan kaum möglich.

Im Bereich der Bauwerksaeroelastik können teilweise auch vereinfachende Strömungsmodelle zum Einsatz kommen. Für ebene Platten in Potentialströmungen existiert z. B. die klassische Theorie des Biege-Torsions-Flatterns nach Theodorsen [79]. Bei Anwendung auf Brückenquerschnitte liefern analytische Ansätze jedoch unzureichende Lösungen, wenn maßgebliche Effekte wie Reibungseinfluß und Wirbelablösung unberücksichtigt bleiben. Sollen Analysemodelle für Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen möglichst alle wesentlichen Strömungsphänomene erfassen und keine Anwendungsgebiete ausschließen, so ist auch hier die Beschreibung turbulenter Bewegungen inkompressibler viskoser Fluide erforderlich. Bei Untersuchungen von aeroelastischen Instabilitäten führt die Vernachlässigung turbulenter Schwankungen in der Anströmung allerdings zu kleineren Grenzgeschwindigkeiten, siehe [65], und liegt damit auf der sicheren Seite.

Ob turbulente Umströmungen von beweglichen elastischen Körpern auf Basis der Reynolds-Gleichungen hinreichend genau modelliert werden können, ist nicht sicher [46], wenn die Zeitskalen der Strukturbewegungen Größenordnungen der turbulenten Schwankungsbewegungen erreichen. Daher sind in näherer Zukunft Grobstruktur-Simulationen sicherlich die geeignete Wahl für Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen, siehe [54]. Zunächst sind jedoch Genauigkeit und Konvergenzeigenschaften für reine Strömungssimulationen zu klären, bevor strenge Kopplungsalgorithmen mit zusätzlichen physikalischen Feldern sinnvoll erscheinen. Da im Rahmen dieser Arbeit die Entwicklung und Anwendung eines monolithischen Berechnungsmodells zur strengen Kopplung von Struktur und Fluid im Vordergrund steht, kommen die Navier-Stokes-Gleichungen für laminare Strömungen bzw. die Reynolds-Gleichungen in Verbindung mit dem gegenüber anderen Zwei-Gleichungs-Modellen im wandnahen Bereich überlegenen k - ω -Turbulenzmodell nach Wilcox [84] zum Einsatz.

3.2 Reynolds-Gleichungen

Formal unterscheiden sich die Reynolds-Gleichungen für inkompressible Fluide von den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen nur durch einen Zusatzterm zur Berücksichtigung des Reynolds-Spannungstensors, wobei die Beschreibungsvariablen, in der Regel Druck und Geschwindigkeiten, nicht mehr für einzelne Punkte des Raum-Zeit-Gebietes gelten, sondern statistisch gemittelte Größen darstellen. Die numerische Behandlung der Reynolds-Gleichungen schließt daher den Fall der Navier-Stokes-Gleichungen für laminare Strömungen mit ein, und die folgende Darstellung kann sich auf den Fall der Reynolds-Gleichungen beschränken. Bezüglich Formulierung und Diskretisierung der reinen Navier-Stokes-Gleichungen sei zudem auf die Arbeit von Walhorn [81] verwiesen.

3.2.1 Beschreibungsvariablen der Strömung

In der numerischen Strömungsmechanik kompressibler Fluide verwendet man bevorzugt konservative Variablen [2], also die Dichten der Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie. Im inkompressiblen Fall mit konstanter Massendichte sind dagegen die primitiven Variablen Druck und Geschwindigkeit die natürliche Wahl zur Aufstellung der Modellgleichungen. Beide Variablensätze lassen sich auch in dimensionslose Formen überführen, die zur Behandlung komplexer Geometrien jedoch ungeeignet sind [16]. Daneben sind Stromfunktion-Drehungs-Formulierungen der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen möglich, die in drei Raumdimensionen auf sechs Variablenkomponenten gegenüber vier primitiven Variablen führen. Im zweidimensionalen Fall sind Stromfunktion und Drehung jedoch skalare Größen, womit sich die Variablenanzahl gegenüber drei primitiven Variablen auf zwei reduziert [16]. Die Anwendung bleibt daher auf zwei Raumdimensionen beschränkt, erschwert allerdings die Formulierung von Randbedingungen und ist insbesondere für die Reynolds-Gleichungen in Verbindung mit Turbulenzmodellen ungeeignet.

Im Hinblick auf eine für zwei und drei Raumdimensionen gültige Formulierung der Reynolds-Gleichungen und des k - ω -Turbulenzmodells zur Beschreibung turbulenter Strömungen inkompressibler Fluide werden dimensionsbehaftete Variablen für Druck und Geschwindigkeit verwendet. Damit folgt eine zur Strukturformulierung in Abschnitt 2.3 äquivalente Strömungsformulierung, die bei einheitlicher Diskretisierung eine ideale Basis für die simultane Lösung des gekoppelten Systems bildet. Nur das Materialverhalten des Fluids unterscheidet sich deutlich von dem elastischer Strukturen, und die Beschreibung der Fluidbewegung erfolgt mit einer parametrischen Betrachtungsweise. Aber mittlere Strömungsgeschwindigkeiten und Spannungen können direkt mit den zugehörigen Größen der Struktur gekoppelt werden.

Die Reynolds-Gleichungen basieren auf der Grundannahme, daß turbulente Strömungen in eine Hauptströmung mittlerer Geschwindigkeit und eine Schwankungsbewegung aufgeteilt werden können. Jede Beschreibungsvariable ϕ besitzt dann einen mittleren Wert $\bar{\phi}$ und einen Schwankungsanteil ϕ' . Die Mittelwertbildung kann bei stationären Hauptströmungen durch zeitliche Mittelung, bei homogener Turbulenz durch räumliche Mittelung oder für allgemeine Fälle statistisch instationärer und inhomogener Strömungen durch Mittelung über ein hinreichend großes Ensemble gleichartiger Strömungssituationen erfolgen. Der mittlere Wert des Schwankungsanteils muss in allen Fällen verschwinden, d. h. es gilt $\overline{\phi'} = 0$. Für die primitiven Variablen Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} und Druck p folgt die Aufteilung

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad \text{und} \quad p = \bar{p} + p'. \quad (3.6)$$

Die als turbulente kinetische Energie k bezeichnete mittlere massenbezogene kinetische Energie der Schwankungsbewegung \mathbf{v}' , mit

$$k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'}, \quad (3.7)$$

dient vielen Turbulenzmodellen als turbulentes Geschwindigkeitsmaß, und die als Dissipationsrate ε bezeichnete, pro Zeit- und Masseneinheit in innere Energie überführte kinetische Energie der Schwankungsbewegung, mit

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho} \overline{(\text{grad } \mathbf{v}') \cdot (\text{grad } \mathbf{v}')}, \quad (3.8)$$

wird in der Turbulenzmodellierung häufig anstelle eines turbulenten Längenmaßes verwendet.

3.2.2 Lokale Form der Reynolds-Gleichungen

Die Mittelung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen unter Berücksichtigung der Ansätze (3.6) für Druck und Geschwindigkeit führt auf die Reynolds-Gleichungen, die zunächst eine exakte Beschreibung der mittleren Bewegung liefern. Die als Kontinuitätsgleichung bezeichnete Massenbilanz, die in lokaler räumlicher Darstellung die Form

$$\text{div } \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{in } Q \quad (3.9)$$

annimmt, ist im zeitveränderlichen Raum-Zeit-Kontinuum $Q = \Omega_t \times I$ mit dem Rand $P = \Gamma_t \times I$ definiert und sichert zu jedem Zeitpunkt die Inkompressibilität des Fluids bezüglich der mittleren Bewegung. Die Impulsbilanz

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{v}} + \text{div}(\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}) \right) = \text{div } \bar{\mathbf{T}} \quad \text{in } Q \quad (3.10)$$

in lokaler räumlicher Darstellung, d. h. für ein raumfestes differentielles Volumenelement angegeben, beschreibt die mittlere Bewegung eines Fluids unter Ausschluß von Schwerkrafteinflüssen. Die materielle Zeitableitung der Geschwindigkeit auf der linken Seite der Gleichung besteht aus lokaler und konvektiver Zeitableitung, wobei der lokale Teil die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit an einem festen Raumpunkt beschreibt und der konvektive Teil die Geschwindigkeitsänderung eines Teilchens infolge Ortswechsel berücksichtigt. Verändert sich das betrachtete Kontrollvolumen, so ist bei Bildung der lokalen Zeitableitung die Kettenregel anzuwenden, um den Einfluß der Bewegung des Volumenelements rückgängig zu machen. Die Drehimpulserhaltung fordert analog zur Strukturformulierung (2.40) die Symmetrie des mittleren Cauchyschen Spannungstensors

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}^T \quad \text{in } Q. \quad (3.11)$$

Bei der Mittelwertbildung der Navier-Stokes-Gleichungen entfallen alle Terme, in denen Schwankungsgrößen linear auftreten, da die Mittelwerte der Schwankungsanteile verschwinden. Der nichtlineare Konvektionsterm der Impulsbilanz führt jedoch zu Produkten von Schwankungsgrößen, die im Mittel nur verschwinden, wenn die Größen völlig unkorreliert sind, was für turbulente Strömungen nicht zutrifft. Ansonsten würden mittlere turbulente Strömungen mit entsprechenden laminaren Strömungen übereinstimmen, und die Turbulenz hätte keinen Einfluß auf die Hauptströmung. Das mittlere Tensorprodukt der Geschwindigkeitsschwankungen, das den Einfluß der Schwankungsbewegungen auf die Hauptströmung berücksichtigt, tritt in der Impulsbilanz (3.10) in gleicher Form wie der mittlere Spannungstensor $\bar{\mathbf{T}}$ auf und wird daher als Reynolds-Spannungstensor

$$\mathbf{T}_t = -\rho \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} \quad (3.12)$$

bezeichnet. Er ist ebenfalls symmetrisch und beschreibt mittlere Trägheitskräfte der turbulenten Schwankungsbewegungen, die als scheinbare Spannungen auf die Hauptströmung wirken.

Bei Newtonschen Fluiden mit linearer Beziehung zwischen Verzerrungsgeschwindigkeit und viskoser Schubspannung gilt für den mittleren Cauchyschen Spannungstensor die konstitutive Gleichung

$$\bar{\mathbf{T}} = 2\mu \mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) - \bar{p} \mathbf{I}, \quad (3.13)$$

wobei der Tensor der mittleren Verzerrungsgeschwindigkeiten

$$\mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} (\text{grad } \bar{\mathbf{v}} + (\text{grad } \bar{\mathbf{v}})^T) \quad (3.14)$$

die Kinematik der Hauptströmung mit dem auf die Momentankonfiguration bezogenen Gradientenoperator formuliert.

3.2.3 Lineare Wirbelviskositätsmodelle

Zur Bestimmung der Komponenten des Reynolds-Spannungstensors existiert kein geschlossener Gleichungssatz, vielmehr sind heuristische Modellannahmen erforderlich. In dieser Arbeit wird hierzu die Gültigkeit der Boussinesq-Approximation vorausgesetzt, die zu linearen Wirbelviskositätsmodellen führt. In Analogie zur konstitutiven Gleichung Newtonscher Fluide wird der lineare Zusammenhang

$$\mathbf{T}_t = 2\mu_t \mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) - \frac{2}{3}\rho k \mathbf{I} \quad (3.15)$$

zwischen den mittleren Verzerrungsgeschwindigkeiten und den Reynoldsschen Schubspannungen angenommen, wobei die Wirbelviskosität μ_t als Proportionalitätsfaktor dient. Der zweite Term in (3.15) sichert in Übereinstimmung mit den Definitionen der turbulenten kinetischen Energie k (3.7) und des Reynolds-Spannungstensors \mathbf{T}_t (3.12) die Gültigkeit der Beziehung $\text{spur } \mathbf{T}_t = -2\rho k$. Die Wirbelviskosität ist im Gegensatz zur molekularen Viskosität jedoch keine Materialkonstante, sondern wie die turbulente kinetische Energie von der Struktur der Turbulenz abhängig. Anstatt der sechs unabhängigen Komponenten des Reynolds-Spannungstensors müssen Wirbelviskositätsmodelle nur noch die räumlichen und zeitlichen Verteilungen von zwei skalaren Größen bestimmen. Hierfür sind zwei zusätzliche Transportgleichungen zu formulieren, wenn auf empirische Informationen über die betrachtete Strömung verzichtet werden soll. Wie schon in Abschnitt 3.1.3 erwähnt, liefern Turbulenzmodelle auf Basis der Boussinesq-Approximation nicht für alle Strömungssituationen brauchbare Ergebnisse, da strenggenommen die Isotropie der turbulenten Schwankungsbewegungen vorausgesetzt wird. Jedoch ermöglicht der Ansatz die Simulation verschiedener turbulenter Strömungen mit vertretbarem numerischen Aufwand.

Mit der konstitutiven Gleichung (3.13) und dem Wirbelviskositätsansatz (3.15) für den Reynolds-Spannungstensor nach (3.12) folgt aus der lokalen räumlichen Form der Reynolds-Gleichungen (3.10) die mittlere Impulsbilanzgleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{v}} \right) = \text{div} \left(2(\mu + \mu_t) \mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) \right) - \text{grad} \left(\bar{p} + \frac{2}{3}\rho k \right). \quad (3.16)$$

Gemeinsam mit der Kinematik (3.14) und der Kontinuitätsgleichung (3.9) bildet Gleichung (3.16) ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeiten $\bar{\mathbf{v}}$ und des mittleren Drucks \bar{p} , vorausgesetzt die Verläufe von μ_t und k sind bekannt. Das trifft nur im laminaren Fall zu, wenn keine Schwankungsbewegungen auftreten und Wirbelviskosität sowie turbulente kinetische Energie verschwinden. Bei turbulenten Strömungen dagegen ist der Gleichungssatz zusätzlich mit den Modellgleichungen des Turbulenzmodells gekoppelt. Im Fall des in Abschnitt 3.3 vorgestellten k - ω -Modells kommen zwei weitere nichtlineare partielle Differentialgleichungen hinzu.

3.2.4 Rand- und Anfangsbedingungen

Mit der Kinematik (3.14) besteht die Impulsbilanz (3.16) aus N_D partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Raum, wobei N_D die Dimension des Raumes ist. Die Lösung der Gleichungen in einem gegebenen Raum-Zeit-Gebiet erfordert daher die Vorgabe von N_D Randbedingungen auf allen Teilen des Randes und von N_D Anfangsbedingungen im gesamten räumlichen Gebiet. Die Kontinuitätsgleichung (3.9) dagegen formuliert nur eine Nebenbedingung im Strömungsgebiet, mit der die Druckverteilung festgelegt wird, die aber keine zusätzlichen Randbedingungen erfordert. Eine Ausnahme bilden Systeme mit ausschließlich geometrischen Randbedingungen, bei denen zusätzlich an einem Punkt des Gebietes eine „Randbedingung“ für den Druck vorzugeben ist.

Der Rand des zeitveränderlichen Raum-Zeit-Kontinuums

$$P = P^g \cup P^h \quad \text{mit} \quad P^g \cap P^h = 0 \quad (3.17)$$

besteht aus dem Dirichlet-Teil P^g mit den geometrischen Randbedingungen

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{auf } P^g \quad (3.18)$$

und dem Neumann-Teil P^h , auf dem die dynamischen Randbedingungen

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{h}} \quad \text{auf } P^h \quad (3.19)$$

gelten. Darin sind $\bar{\mathbf{g}}$ eingeprägte mittlere Geschwindigkeiten und $\bar{\mathbf{h}}$ auf die mittlere Bewegung wirkende eingeprägte Randspannungen. Der mittlere Spannungsvektor

$$\bar{\mathbf{t}} = (\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}_t) \cdot \mathbf{n} \quad (3.20)$$

beschreibt die auf dem Rand oder in einer Schnittfläche auf die Hauptströmung wirkenden mittleren Spannungen, die sich aus Druck, viskositätsbedingten Schubspannungen und Reynolds-Spannungen zusammensetzen. Die Ausrichtung des Randes bzw. der Schnittfläche ist durch den äußeren Normalenvektor \mathbf{n} bestimmt.

Wenn, wie z. B. in der Bauwerksaerodynamik erforderlich, nur ein räumlicher Ausschnitt einer Strömungssituation betrachtet wird und Fluidteilchen nach Umströmung eines Körpers aus dem betrachteten Gebiet austreten, so sind an diesem Rand i. allg. Geschwindigkeiten und Spannungen unbekannt. Die Vorgabe einer der obigen Bedingungen unterwirft die Strömung daher einem zusätzlichen unphysikalischen Zwang. Aber Bedingungen, die das Strömungsverhalten am Ausfluß exakt beschreiben, sind im voraus nicht bekannt. Daher sollte der Ausflußrand möglichst weit entfernt von der zu simulierenden Strömungssituation liegen, so daß z. B. Ablösewirbel

bis zum Austritt aus dem Berechnungsgebiet einen großen Teil ihrer Energie verlieren und eine möglichst gleichmäßige Strömung vorliegt. In Verbindung mit der Vorgabe homogener Neumann-Bedingungen lassen sich dann zumindest bei größeren Reynolds-Zahlen Rückwirkungen auf das untersuchte Strömungsverhalten minimieren, wobei infolge der Inkompressibilität Störungen des Druckfeldes weitaus stärker hervortreten als Beeinflussungen des Geschwindigkeitsfeldes.

Als Anfangsbedingung ist zum Zeitpunkt $t = 0$ im anfänglichen räumlichen Gebiet Ω_0 ein divergenzfreies mittleres Geschwindigkeitsfeld

$$\bar{\mathbf{v}}(t=0) = \bar{\mathbf{v}}_a \quad \text{mit} \quad \text{div } \bar{\mathbf{v}}_a = 0 \quad \text{in } \Omega_0 \quad (3.21)$$

vorzugeben, um zu Beginn einer Simulation eine konsistente Strömungssituation sicherzustellen. Aber auch wenn die Divergenzfreiheit verletzt wird, stellt sich nach wenigen Zeitschritten, die von starken Störungen des Druckfeldes geprägt sind, eine den Modellgleichungen genügende Strömung ein.

3.2.5 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Reynolds-Gleichungen

Die stabilisierte zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Reynolds-Gleichungen für die Raum-Zeit-Scheibe $Q_n = \Omega_t \times I_n$ mit dem Dirichlet-Rand $P_n^g = \Gamma_t^g \times I_n$ und dem Neumann-Rand $P_n^h = \Gamma_t^h \times I_n$ lautet

$$\int_{Q_n} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{v}} \right) dQ + \int_{Q_n} \mathbf{D}(\delta \bar{\mathbf{v}}) \cdot 2(\mu + \mu_t) \mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) dQ \quad (3.22a)$$

$$- \int_{Q_n} (\text{div } \delta \bar{\mathbf{v}}) \bar{p} dQ - \int_{Q_n} (\text{div } \delta \bar{\mathbf{v}}) \frac{2}{3} \rho k dQ \quad (b)$$

$$+ \int_{Q_n} \delta \bar{p} \text{div } \bar{\mathbf{v}} dQ \quad (c)$$

$$+ \int_{\Omega_n} \delta \bar{\mathbf{v}}(t_n^+) \cdot \rho (\bar{\mathbf{v}}(t_n^+) - \bar{\mathbf{v}}(t_n^-)) d\Omega \quad (d)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \left(\tau_{SUPG}^F \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \delta \bar{\mathbf{v}} + \tau_{PSPG}^F \frac{1}{\rho} \text{grad } \delta \bar{p} \right) \cdot \mathcal{L}_{Imp}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{p}, k, \mu_t) dQ \quad (e)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \tau_{Kont}^F \rho (\text{div } \delta \bar{\mathbf{v}}) \text{div } \bar{\mathbf{v}} dQ \quad (f)$$

$$- \int_{P_n^g} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{t}} dP + \int_{P_n^g} \delta \bar{\mathbf{t}} \cdot (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{g}}) dP \quad (g)$$

$$- \int_{P_n^h} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{h}} dP = 0 \quad \forall \delta \bar{\mathbf{v}}, \delta \bar{p}, \delta \bar{\mathbf{t}}. \quad (h)$$

Darin gibt

$$\mathcal{L}_{Imp} = \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{v}} \right) - \text{div} \left(2(\mu + \mu_t) \mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) \right) + \text{grad} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \right) \quad (3.23)$$

das Residuum der differentiellen Form (3.16) der Impulsbilanz an. Die numerische Lösung der Modellgleichungen im Raum-Zeit-Gebiet Q erfolgt durch sukzessive Auswertung von (3.22) für alle Zeitscheiben Q_0, \dots, Q_{N-1} und beginnt nach (3.21) mit der Anfangsbedingung

$$\bar{\mathbf{v}}(t_0^-) = \bar{\mathbf{v}}_a \quad \text{in } \Omega_0. \quad (3.24)$$

Da für die Beschreibungsvariablen $\bar{\mathbf{v}}$, \bar{p} und $\bar{\mathbf{t}}$ Näherungsansätze mit einer endlichen Anzahl von Freiwerten gelten, bestimmt die Finite-Element-Formulierung (3.22) nur eine Näherungslösung der Modellgleichungen, auch wenn der Näherungscharakter der Beschreibungsvariablen hier nicht besonders gekennzeichnet ist. Die Geometrieapproximation ist in Raum und Zeit stetig, die Ansätze für Geschwindigkeiten, Druck und Randspannungen sind nur im Raum stetig und können in der Zeit an den Zeitscheibenübergängen diskontinuierliche Verläufe annehmen. Die im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten 8-Knoten-Raum-Zeit-Hexaederelemente für räumlich zweidimensionale Aufgabenstellungen verwenden für die Geometrie sowie für alle Variablenkomponenten die in Abschnitt 2.3.8 vorgestellten trilinearen Ansätze im Element sowie bilineare Ansätze auf dem Rand.

In der gewichteten Integralformulierung (3.22) der Reynolds-Gleichungen zeigen Zeilen (a) und (b) die durch Standard-Galerkin-Wichtung von (3.16) und anschließende partielle Integration entstandene schwache Form der Impulsbilanz, die in integraler Form auch die Impulserhaltung zwischen den Elementen sicherstellt. In Zeile (c) folgt die Standard-Galerkin-Formulierung der Kontinuitätsgleichung (3.9), die in integraler Form die Inkompressibilität des Fluids erzwingt. Der Geschwindigkeitsprungterm in Zeile (d) erfüllt die Zeitscheibenübergangsbedingung der zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Formulierung. Zeile (e) zeigt die Konvektions- und Druckstabilisierung der Impulsbilanz mit den elementweise definierten Stabilisierungsparametern τ_{SUPG}^F und τ_{PSPG}^F , die im folgenden Abschnitt näher bestimmt werden. Die Galerkin / Least-Squares-Stabilisierung der Kontinuitätsgleichung mit dem Stabilisierungsparameter τ_{Kont}^F folgt in Zeile (f). Das erste Randintegral in Zeile (g) entsteht bei der partiellen Integration der Impulsbilanz und dient der Bestimmung der Randspannungen auf dem Dirichlet-Rand. Der zweite Term beinhaltet die mit der Randspannungsvariation gewichtete Integralformulierung der geometrischen Randbedingungen (3.18). Die letzte Zeile (h) berücksichtigt die auf dem Neumann-Rand eingepprägten Randspannungen nach (3.19).

3.2.6 Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente

Die Anwendung der Standard-Galerkin-Finite-Element-Methode zur numerischen Lösung der Modellgleichungen der Strömung führt bei konvektionsdominanten Strömungen, d. h. bei höheren Reynolds-Zahlen, zu unphysikalischen Oszillationen der Geschwindigkeiten in Raum und Zeit. Und die Verwendung von Ansätzen gleicher Ordnung für Geschwindigkeiten und Druck führt zu instabilen Druckverläufen mit unphysikalischen Oszillationen im Raum. Wie in der Einleitung in Abschnitt 1.3.2 angedeutet, schafft der Einsatz von stabilisierten Finite-Element-Formulierungen hier Abhilfe und führt zu stabilen Lösungen für beliebige Reynolds-Zahlen und Ansatzordnungen. Im einzelnen kommen eine Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin- und eine Pressure-Stabilized-Petrov-Galerkin-Stabilisierung der Impulsbilanz (3.22e) sowie eine Galerkin/Least-Squares-Stabilisierung der Kontinuitätsgleichung (3.22f) zum Einsatz. Die SUPG-Stabilisierung sichert glatte Lösungen bei dominanter Konvektion, und die PSPG-Stabilisierung ermöglicht die Verwendung gleicher Ansatzordnungen für Geschwindigkeiten und Druck. Die GLS-Stabilisierung der Kontinuitätsgleichung verbessert zusätzlich Konvergenz und Stabilität der numerischen Lösung bei hohen Reynolds-Zahlen, siehe [6, 9, 77].

Aufgrund der räumlich bilinearen Geschwindigkeitsansätze verschwinden im Residuum der Impulsbilanz (3.23) die zweifachen Ableitungen nach einer lokalen Raumkoordinate. Bei der Auswertung der Stabilisierungsterme bleibt der Viskositätsterm daher unberücksichtigt. Die Konsistenz der Formulierung ist aber gewährleistet, da die Stabilisierungsparameter τ_{SUPG}^F und τ_{PSPG}^F mit feiner werdender Diskretisierung gegen null streben. Eine zusätzliche Berücksichtigung der lokalen Zeitableitung in der Wichtung der Stabilisierungsterme führt zur GLS-Stabilisierung der Impulsbilanz, hat aber bei den hier untersuchten Beispielen keine positiven Auswirkungen auf die Lösung. Vielmehr können innerhalb der Zeitscheiben unphysikalische zeitliche Druckänderungen auftreten, die zu sägezahnartigen Zeitverläufen führen.

In Anlehnung an Arbeiten von Tezduyar et. al. [75, 77] erfolgt die Festlegung der Stabilisierungsparameter unter der Bedingung, daß die Stabilisierungsterme einheitenkonform sind und die Konsistenz mit der differentiellen Form der Modellgleichungen gewährleistet ist. Für den Parameter der Druckstabilisierung gilt

$$\tau_{PSPG}^F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\|\bar{\mathbf{v}}_{rel}\|}{h}\right)^2 + \left(\frac{12(\mu+\mu_t)}{\rho h^2}\right)^2}}. \quad (3.25)$$

Der Parameter der Konvektionsstabilisierung

$$\tau_{SUPG}^F = \tau_{PSPG}^F \zeta(\text{Re}_e) \quad (3.26)$$

wird bei vorherrschendem Reibungseinfluß zusätzlich abgemindert, und der Stabilisierungsparameter für die Kontinuitätsgleichung folgt zu

$$\tau_{Kont}^F = \frac{1}{2} h \|\bar{\mathbf{v}}_{rel}\| \zeta(\text{Re}_e) . \quad (3.27)$$

Bei stationären Aufgabenstellungen entfällt in (3.25) der erste, die Zeitscheibendicke Δt enthaltende Summand. Als lokales Längenmaß h dient der Durchmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt der zeitgemittelten Elementfläche entspricht. Als skalares Maß für die konvektive Geschwindigkeit im Element wird die Quadratnorm des mittleren Geschwindigkeitsvektors $\|\bar{\mathbf{v}}_{rel}\|$ relativ zur Netzgeschwindigkeit gewählt. Bewegt man die Elementknoten mit der mittleren Strömung mit, was zu einer Lagrangeschen Betrachtung der Strömung führt, so verschwindet in Einklang mit dem Verschwinden des konvektiven Teils der materiellen Zeitableitung der Geschwindigkeit auch die Relativgeschwindigkeit $\bar{\mathbf{v}}_{rel}$. Die Abminderungsfunktion

$$\zeta(\text{Re}_e) = \begin{cases} \text{Re}_e & \text{für } \text{Re}_e < 1,0 \\ 1,0 & \text{für } \text{Re}_e \geq 1,0 \end{cases} \quad (3.28)$$

mit der Element-Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_e = \frac{\rho h \|\bar{\mathbf{v}}_{rel}\|}{6 (\mu + \mu_t)} \quad (3.29)$$

bewirkt, daß mit abnehmender Element-Reynolds-Zahl die Stabilisierungsterme für konvektive Zeitableitung und Kontinuitätsgleichung ihren Einfluß verlieren und bei nicht vorhandener konvektiver Geschwindigkeit verschwinden.

Beispiele zur Veranschaulichung des Einflusses der Stabilisierungsterme auf die numerische Lösung finden sich z. B. bei Wall [82] und Wahlhorn [81]. In [82] werden auch verschiedene Möglichkeiten zur Definition der Stabilisierungsparameter und der räumlichen Elementabmessung h diskutiert. So kann für die Konvektionsstabilisierung die Verwendung einer mittleren Elementlänge in Richtung der Strömung vorteilhaft sein.

3.2.7 Iterative Lösung ohne Turbulenzmodell

Im Fall laminarer Strömungen beschreibt die Finite-Element-Formulierung (3.22) mit globalen Variablen für Geschwindigkeiten, Druck und Randspannungen das Strömungsverhalten in der aktuellen Raum-Zeit-Scheibe. Wirbelviskosität und turbulente kinetische Energie bleiben unberücksichtigt, und die gemittelten Strömungsgrößen werden durch ungemittelte ersetzt. Die Auswertung der Integrale in (3.22) mit den

gewählten Ansätzen führt in Analogie zur Strukturformulierung in Abschnitt 2.3.9 auf das nichtlineare Gleichungssystem

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{x}}_n) \hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{x}}_n) \quad (3.30)$$

mit der Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}$ und der rechten Seite $\hat{\mathbf{b}}$ zur Bestimmung der im Freiwertvektor $\hat{\mathbf{x}}_n$ zusammengefaßten Geschwindigkeits-, Druck- und Randspannungsfreiwerte der n -ten Zeitscheibe. Eine Ablösung der Druckfreiwerte auf Elementebene analog zur Ablösung der Spannungen in der Elastodynamik ist hier nicht möglich, da der Ansatz für den Druckverlauf kontinuierlich ist, so daß die Knotenfreiwerte alle angrenzenden Elemente beeinflussen. Die Nichtlinearität von (3.30) ist einerseits durch den Konvektionsterm begründet, kann andererseits aber auch Folge eines veränderlichen, von der Strömungssituation abhängigen Integrationsgebiets sein, etwa bei freien Oberflächen, Lagrangescher Betrachtung der Strömung oder Fluid-Struktur-Interaktion.

Die iterative Lösung von (3.30) erfolgt analog zu (2.63) mit einem fixpunktartigen, auch als Picard-Iteration bezeichneten Verfahren der Form

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{x}}_n^{i-1}) \hat{\mathbf{x}}_n^i = \hat{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{x}}_n^{i-1}), \quad (3.31)$$

wobei die konvektive Geschwindigkeit des vorhergehenden Iterationsschritts direkt in die Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}$ eingeht und der Geschwindigkeitsgradient des Konvektionsterms mit den Freiwerten formuliert wird. Wenn zusätzlich das Lösungsgebiet unbekannt ist, hängen Systemmatrix und rechte Seite auch von den aus dem Strömungszustand des letzten Iterationsschritts folgenden Elementgeometrien ab. Um bei der Iteration geeignete Startwerte für konvektive Geschwindigkeiten und Knotenverschiebungen zu erhalten, wird der zeitliche Verlauf der Strömungsvariablen in der vorhergehenden Zeitscheibe auf die aktuelle Zeitscheibe extrapoliert.

3.3 k - ω -Turbulenzmodell

Das k - ω -Turbulenzmodell nach Wilcox in der Version von 1998 [84] gehört zu den Zwei-Gleichungs-Modellen auf Basis der Boussinesq-Approximation (3.15), d. h. der Annahme einer in Raum und Zeit veränderlichen skalaren Wirbelviskosität μ_t zur Bestimmung der Komponenten des Reynolds-Spannungstensors aus den Verzerrungsgeschwindigkeiten der mittleren Bewegung. Ausführliche Begründungen für die im nächsten Abschnitt zusammengestellten Modellgleichungen und Konstanten sowie zahlreiche Verifikationsbeispiele finden sich in [84]. Hier soll nur eine kurze Motivation für die Wahl der Variablen und die Formulierung der zusätzlichen partiellen Differentialgleichungen folgen.

Die Wirbelviskosität kann nach Kolmogorov und Prandtl im einfachsten Fall aus einer charakteristischen Geschwindigkeit und einem charakteristischen Längenmaß der Turbulenz bestimmt werden. Als Geschwindigkeitsmaß findet fast immer die turbulente kinetische Energie k nach (3.7) Verwendung. Zur Beschreibung des Längenmaßes dient häufig die Dissipationsrate ε nach (3.8), die über die dimensionsanalytisch begründete Beziehung $\varepsilon \sim k^{3/2}/l$ mit dem Längenmaß l verknüpft ist.

Um zusätzliche, von den Reynolds-Gleichungen unabhängige Modellgleichungen zur Bestimmung von Turbulenzvariablen zu formulieren, können neben den gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen auch Momente der Navier-Stokes-Gleichungen gebildet werden. D. h. die Navier-Stokes-Gleichungen werden mit Schwankungsanteilen der Beschreibungsvariablen multipliziert und anschließend gemittelt. Auf diese Weise kann man z. B. partielle Differentialgleichungen für alle Komponenten des Reynolds-Spannungstensors nach (3.12) ableiten. Die Gleichungen enthalten jedoch neue, unbekannte Mehrfach-Korrelationen von Schwankungsgrößen, so daß in den sechs neuen Gleichungen 22 neue Unbekannte auftreten.

In gleicher Weise kann man partielle Differentialgleichungen für die turbulente kinetische Energie k und die Dissipationsrate ε angeben. Für die unbekannten Mehrfach-Korrelationen von Schwankungsgrößen sind geeignete Modellannahmen zu treffen, z. B. indem die Korrelationen unter Einführung verschiedener Modellkonstanten mit den Größen der mittleren Strömung und den Turbulenzvariablen selbst phänomenologisch beschrieben werden. Die Festlegung der Modellkonstanten erfolgt anhand verschiedener, möglichst grundlegender Strömungssituationen, für die in ausreichendem Maße experimentell erworbene Ergebnisdaten vorliegen.

Die Modellannahmen führen in der Regel zu starken Nichtlinearitäten und in der Folge zu numerisch schwer handhabbaren Differentialgleichungen. Insbesondere können im Nenner auftretende Variablen Singularitäten hervorrufen. So steht in der Gleichung für die Dissipationsrate ε die turbulente kinetische Energie k üblicherweise im Nenner. Folglich ist im Fall fester Wände, wenn die Bedingung $k=0$ gilt, die Integration bis an den Rand des Strömungsgebiets nicht ohne weiteres möglich. Vorteilhaft ist hier die Verwendung der spezifischen, d. h. auf k bezogenen Dissipationsrate $\omega \sim \varepsilon/k$ als zweite Turbulenzvariable neben der turbulenten kinetischen Energie, womit die Auflösung turbulenter Grenzschichten bis an den Rand möglich ist.

3.3.1 Lokale Form der Modellgleichungen

Um die in den Reynolds-Gleichungen nach (3.16) auftretenden Größen μ_t und k zu bestimmen, verwendet das k - ω -Turbulenzmodell nach Wilcox [84] jeweils eine partielle Differentialgleichung für die turbulente kinetische Energie k und die spezifische

Dissipationsrate ω . Unter der Annahme, daß die Wirbelviskosität μ_t nur von k und ω abhängt, folgt aus dem Π -Theorem der Dimensionsanalysis die Beziehung $\mu_t \sim \rho k / \omega$. Ohne Einführung einer zusätzlichen Konstanten wird die Wirbelviskosität mit

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (3.32)$$

bestimmt. Die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } k \right) = \mathbf{T}_t \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{v}} - \beta^* \rho k \omega + \text{div} \left((\mu + \sigma^* \mu_t) \text{grad } k \right) \quad (3.33)$$

enthält die beiden Modellkonstanten β^* und σ^* und die Transportgleichung für die spezifische Dissipationsrate ω

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \omega \right) = \alpha \frac{\omega}{k} \mathbf{T}_t \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{v}} - \beta \rho \omega^2 + \text{div} \left((\mu + \sigma \mu_t) \text{grad } \omega \right) \quad (3.34)$$

die drei Konstanten α , β und σ . Mit der Beschränkung auf zweidimensionale Fälle folgen nach [84] die Modellkonstanten und zusätzlichen Zusammenhänge

$$\beta^* = \beta_0^* f_{\beta^*}, \quad \sigma^* = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{13}{25}, \quad \beta = \frac{9}{125}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \quad (3.35)$$

mit

$$\beta_0^* = \frac{9}{100}, \quad f_{\beta^*} = \begin{cases} 1 & \text{für } \chi_k \leq 0 \\ \frac{1 + 680 \chi_k^2}{1 + 400 \chi_k^2} & \text{für } \chi_k > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

und

$$\chi_k = \frac{1}{\omega^3} (\text{grad } k) \cdot \text{grad } \omega. \quad (3.37)$$

Die linken Seiten der im Raum-Zeit-Kontinuum Q definierten Transportgleichungen (3.33) und (3.34) bestehen jeweils aus lokaler und konvektiver Zeitableitung der zu transportierenden Größe und geben die zeitlichen Änderungen der Größen bei Betrachtung eines sich bewegenden Fluidteilchens an. Die zeitlichen Änderungen sind jeweils gleich der Summe aus Produktion, Dissipation und Diffusion der Größe, wobei der Diffusionsterm neben der molekularen Diffusion auch einen Anteil aus turbulentem Transport beinhaltet. Letzterer wird unter Verwendung der Wirbelviskosität als zusätzliche Diffusion modelliert.

Die im k - ε -Modell verwendete Dissipationsrate ε nach Gleichung (3.8) und das in der Turbulenzmodellierung oft eingesetzte turbulente Längenmaß l folgen zu

$$\varepsilon = \beta^* \omega k \quad \text{und} \quad l = \frac{\sqrt{k}}{\omega}. \quad (3.38)$$

3.3.2 Rand- und Anfangsbedingungen

Für die Lösung der Transportgleichungen im gegebenen Raum-Zeit-Gebiet ist jeweils die Vorgabe einer Randbedingung auf allen Teilen des Randes und einer Anfangsbedingung im gesamten räumlichen Gebiet erforderlich.

Nach (3.17) besteht der Rand aus einem Dirichlet-Teil, auf dem die zu transportierenden Größen

$$k = g_k \quad \text{und} \quad \omega = g_\omega \quad \text{auf } P^g \quad (3.39)$$

bekannt sind und einem Neumann-Teil, auf dem die jeweiligen Flüsse

$$\begin{aligned} (\mu + \sigma^* \mu_t) (\text{grad } k) \cdot \mathbf{n} &= h_k \quad \text{und} \\ (\mu + \sigma \mu_t) (\text{grad } \omega) \cdot \mathbf{n} &= h_\omega \quad \text{auf } P^h \end{aligned} \quad (3.40)$$

vorzugeben sind. Darin sind g_k und g_ω eingeprägte Werte der turbulenten kinetischen Energie und der spezifischen Dissipationsrate sowie h_k und h_ω vorgeschriebene Werte für die zugehörigen Flüsse.

Zu Beginn einer Simulation zum Zeitpunkt $t=0$ müssen im anfänglichen räumlichen Gebiet Ω_0 die Verteilungen der turbulenten kinetischen Energie und der spezifischen Dissipationsrate

$$k(t=0) = k_a \quad \text{und} \quad \omega(t=0) = \omega_a \quad \text{in } \Omega_0 \quad (3.41)$$

bekannt sein. Im allgemeinen sind die anfänglichen Verteilungen von Geschwindigkeit, Druck und Turbulenzvariablen jedoch unbekannt, so daß man den Anfangszustand zunächst vorschätzen und den gekoppelten Gleichungssatz so lange lösen muß, bis sich eine physikalisch sinnvolle, mit den Modellgleichungen konsistente Lösung einstellt.

Wie schon in Abschnitt 3.2.4 erwähnt, sind die vorzugebenden Randwerte in vielen Strömungssituationen unbekannt und müssen sinnvoll abgeschätzt werden. Für den Ausströmrand und für Ränder, die hinreichend weit von umströmten Körpern entfernt sind, bieten sich auch hier homogene Neumann-Bedingungen an. Schwieriger ist die Situation am Einströmrand, da insbesondere das k - ω -Modell empfindlich auf die Werte der Turbulenzvariablen in der Anströmung reagiert, so daß ggf. Parameterstudien erforderlich sind. Auch bei laminaren Anströmungen ist für die spezifische Dissipationsrate ω ein von null verschiedener Wert vorzugeben, da ansonsten die Wirbelviskosität nach (3.32) nicht definiert ist. Sinnvollerweise wählt man hier k und ω so, daß die Wirbelviskosität vernachlässigbar klein gegenüber der molekularen Viskosität ist.

Besondere Aufmerksamkeit erfordert bei Zwei-Gleichungs-Modellen die Vorgabe von Randbedingungen an festen Wänden. In den meisten Fällen, etwa beim Standard- k - ε -Modell, können die Modellgleichungen ohne zusätzliche Dämpfungsfunktionen nicht bis an die Oberflächen fester Wände integriert werden. Stattdessen wird das Strömungsverhalten in Wandnähe, d. h. in der Grenzschicht, durch Wandfunktionen angenähert, siehe z. B. [68, 84]. Die Gleichungen des k - ω -Modells dagegen können auch ohne Modifikationen für wandnahe Strömungen kleiner Reynolds-Zahlen durch die Grenzschicht bis zur Wandoberfläche integriert werden. Für die turbulente kinetische Energie ist an festen Wänden der Randwert $k=0$ anzusetzen, da direkt an der Wand keine Schwankungsbewegungen auftreten können. Die spezifischen Dissipationsrate ω dagegen strebt bei ideal glatten Wänden gegen unendlich, nimmt bei rauen Wandoberflächen jedoch endlich große Werte an. Für kleine Wandrauhigkeiten mit $k_s^+ < 25$ schlägt Wilcox [84] den Randwert

$$\omega = \frac{2500\mu}{\rho k_s^2} \quad \text{auf } P_w^g \quad (3.42)$$

vor, wobei k_s die Sandrauhigkeit der Wand angibt. Wählt man für k_s einen ausreichend kleinen Wert, so daß für die dimensionslose Sandrauhigkeit

$$k_s^+ = \frac{\rho u_\tau k_s}{\mu} < 5 \quad (3.43)$$

gilt, dann ist die Wand nach [68] als hydraulisch glatt anzusehen, womit die Randbedingung (3.42) auch für glatte Wände gültig ist. Die mit der Wandschubspannung τ_w definierte Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.44)$$

dient bei der Untersuchung von turbulenten Grenzschichten als charakteristische Geschwindigkeit, um dimensionslose Grenzschichtgrößen einzuführen. Für die Wandschubspannung

$$\tau_w = |\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{s}| \quad (3.45)$$

mit dem Randtangenten-Einheitsvektor \mathbf{s} in Richtung der Strömung und dem Randspannungsvektor $\bar{\mathbf{t}}$ nach (3.20) ist nur die molekulare Viskosität verantwortlich, da der Reynolds-Spannungstensor an der Wandoberfläche verschwindet.

Bei der Festlegung von Randwerten für ω nach (3.42) unter der Bedingung (3.43) ist zu beachten, daß die Wandschubspannung und damit auch die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ über die Wandlänge und in der Zeit veränderlich ist. Für eine stabile und effiziente numerische Lösung sind aber möglichst kleine ω -Werte vorzugeben. Daher kann eine fortlaufende Anpassung der Randwerte an die aktuelle Strömungssituation vorteilhaft sein, siehe [63].

3.3.3 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung des k - ω -Modells

Die Anwendung der Methode der gewichteten Residuen in Verbindung mit dem kontinuierlichen Galerkin-Verfahren im Raum und dem diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren in der Zeit sowie einer SUPG-Stabilisierung der Konvektionsterme führt auf die stabilisierte zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Transportgleichungen (3.33) und (3.34) des k - ω -Modells. Die Vorschrift zur Bestimmung der Freiwerte der Turbulenzvariablen in der Raum-Zeit-Scheibe Q_n mit dem Dirichlet-Rand P_n^g und dem Neumann-Rand P_n^h lautet

$$\int_{Q_n} \delta k \cdot \rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } k \right) dQ - \int_{Q_n} \delta k \, 2\mu_t \mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{v}} dQ \quad (3.46a)$$

$$+ \int_{Q_n} \delta k \, \beta^* \rho k \omega dQ + \int_{Q_n} (\text{grad } \delta k) \cdot (\mu + \sigma^* \mu_t) \text{grad } k dQ \quad (b)$$

$$+ \int_{\Omega_n} \delta k(t_n^+) \cdot \rho (k(t_n^+) - k(t_n^-)) d\Omega \quad (c)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \tau_{SUPG}^k (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \delta k) \cdot \mathcal{L}_k(\bar{\mathbf{v}}, k, \omega) dQ \quad (d)$$

$$- \int_{P_n^h} \delta k \, h_k dP = 0 \quad \forall \delta k \quad (e)$$

und

$$\int_{Q_n} \delta \omega \cdot \rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \omega \right) dQ - \int_{Q_n} \delta \omega \, 2\alpha \rho \mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) \cdot \text{grad } \bar{\mathbf{v}} dQ \quad (3.47a)$$

$$+ \int_{Q_n} \delta \omega \, \beta \rho \omega^2 dQ + \int_{Q_n} (\text{grad } \delta \omega) \cdot (\mu + \sigma \mu_t) \text{grad } \omega dQ \quad (b)$$

$$+ \int_{\Omega_n} \delta \omega(t_n^+) \cdot \rho (\omega(t_n^+) - \omega(t_n^-)) d\Omega \quad (c)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \tau_{SUPG}^\omega (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \delta \omega) \cdot \mathcal{L}_\omega(\bar{\mathbf{v}}, k, \omega) dQ \quad (d)$$

$$- \int_{P_n^h} \delta \omega \, h_\omega dP = 0 \quad \forall \delta \omega, \quad (e)$$

wobei die Näherungsansätze für k und ω die Dirichlet-Randbedingungen nach (3.39) erfüllen und die Wichtungsfunktionen δk und $\delta \omega$ auf dem Dirichlet-Rand verschwinden müssen. Die Lösung der Modellgleichungen im gesamten Raum-Zeit-Kontinuum Q erfolgt durch sukzessive Auswertung von (3.46) und (3.47) für alle Zeitscheiben und beginnt nach (3.41) mit den Anfangsbedingungen

$$k(t_0^-) = k_a \quad \text{und} \quad \omega(t_0^-) = \omega_a \quad \text{in } \Omega_0. \quad (3.48)$$

Die Diskretisierung der Turbulenzmodellgleichungen erfolgt mit isoparametrischen 8-Knoten-Raum-Zeit-Hexaederelementen, die auch für die Reynolds-Gleichungen in Abschnitt 3.2.5 und die Elastodynamik in Abschnitt 2.3.6 eingesetzt werden. Die elementweise trilinearen Ansatzfunktionen für k und ω verlaufen im Raum stetig und können zwischen den Zeitscheiben Unstetigkeiten aufweisen.

Die gewichteten Integralformulierungen (3.46) und (3.47) enthalten in den ersten beiden Zeilen die durch Standard-Galerkin-Wichtung und anschließende partielle Integration der Diffusionsterme entstandenen schwachen Formen der Transportgleichungen für k und ω . In den Produktionstermen, den jeweils zweiten Integralen der ersten Zeilen, geht vom Reynolds-Spannungstensor nach (3.15) nur der mit Wirbelviskosität und Verzerrungsgeschwindigkeiten formulierte deviatorische Anteil ein. Der hydrostatische k -Term dagegen verschwindet bei Bildung des Doppelskalarprodukts mit dem mittleren Geschwindigkeitsgradienten, da inkompressible Fluide nach (3.9) divergenzfreie Geschwindigkeitsfelder aufweisen. Zeile (c) zeigt jeweils den Sprungterm der zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Formulierung. In den Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Stabilisierungstermen, jeweils in Zeile (d), geben die nichtlinearen Differentialoperatoren \mathcal{L}_k und \mathcal{L}_ω die Residuen der Differentialgleichungen (3.33) und (3.34) an. Die Definition der Stabilisierungsparameter

$$\tau_{SUPG}^k = \tau_{SUPG}^\omega = \tau_{SUPG}^F \quad (3.49)$$

ist identisch mit der Definition des Konvektionsstabilisierungsparameters (3.26) der Reynolds-Gleichungen. Die letzten Zeilen berücksichtigen jeweils die inhomogenen Neumann-Randbedingungen nach (3.40).

3.3.4 Iterative Lösung der gekoppelten Modellgleichungen

Die Gleichungen des k - ω -Modells bilden gemeinsam mit den Reynolds-Gleichungen zur Beschreibung der mittleren Fluidbewegung ein gekoppeltes System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, wobei insbesondere die Turbulenzmodellgleichungen starke Nichtlinearitäten aufweisen und die Verläufe der Turbulenzvariablen von extremen Größenunterschieden gekennzeichnet sind. Bei der Beschreibung turbulenter Strömungen treten zudem Raum- und Zeitskalen auf, die gegenüber der mittleren Bewegung um viele Größenordnungen kleiner sind, was ein sehr steifes Differentialgleichungssystem zur Folge hat. Eine simultane Lösung aller Gleichungen mit nur einer Iterationsschleife ist daher kaum möglich, siehe [16]. Insbesondere, wenn zu Beginn einer Simulation die vorgeschätzten Anfangswerte von einem physikalisch sinnvollen Zustand weit entfernt sind, ist mit simultanen Verfahren auch bei sehr kleinen Zeitschritten keine Konvergenz zu erreichen.

Daher erfolgt die Lösung der gekoppelten Modellgleichungen in einer äußeren Iterationsschleife über die verschiedenen Gleichungen. Innerhalb der äußeren Iteration werden nacheinander die Reynolds-Gleichungen, die ω -Gleichung und die k -Gleichung jeweils mit einem fixpunktartigen Verfahren nach (3.31) iterativ gelöst. D. h., bei der Lösung der Reynolds-Gleichungen nehmen Wirbelviskosität und turbulente kinetische Energie die unveränderlichen Werte des letzten äußeren Iterationsschritts an, und die mittleren Geschwindigkeiten sind bei der iterativen Lösung der Turbulenzmodellgleichungen unveränderlich. Die Plattengrenzschicht in Abschnitt 3.4.2 benötigt fünf bis sieben äußere Iterationen, wobei die Anzahl innerer Iterationsschritte im Verlauf der äußeren Iteration zunimmt und je nach Typ der Gleichung variiert. Für die Reynolds-Gleichungen sind zwei bis drei Iterationsschritte ausreichend. Die ω -Gleichung benötigt vier bis sechs und die k -Gleichung sechs bis neun innere Iterationsschritte. Allerdings erfordern die Turbulenzmodellgleichungen zur Sicherstellung der Konvergenz eine Unterrelaxation der Turbulenzvariablen, womit sich die in der Systemmatrix zur Formulierung der nichtlinearen Anteile auftretenden Variablen aus den Werten des letzten und vorletzten Iterationsschritts zusammensetzen. Für ω liegt der Unterrelaxationsparameter etwa bei 0,8 und für k etwa bei 0,6.

Die Wirbelviskosität wird bei der iterativen Lösung der Turbulenzmodellgleichungen aus den Turbulenzvariablen der vorhergehenden Iterationsschritte gebildet und als elementweise konstant angenommen. Damit verschwinden die räumlichen Ableitungen der Wirbelviskosität, und folglich entfallen bei elementweise linearen Ansätzen auch die diffusiven Anteile in den Stabilisierungstermen. Da die mittleren Geschwindigkeiten bei der Iteration unveränderlich sind, gehen die Produktionsterme nur auf der rechten Seite ein, wogegen die Dissipationsterme jeweils auf der linken Seite stehen und die spezifische Dissipationsrate in die Systemmatrix eingeht.

Aufgrund ihrer physikalischen Bedeutung dürfen die Turbulenzvariablen k und ω nur positive Werte annehmen. Da die Verläufe jedoch insbesondere in Wandnähe steile Gradienten aufweisen, können in der numerischen Lösung trotz Konvektionsstabilisierung negative Werte auftreten, die sich nachteilig auf die Konvergenz der Iteration auswirken und im Extremfall instabile Lösungen verursachen. Abhilfe schafft hier die Festlegung von unteren Schranken für die Turbulenzvariablen, so daß nach jedem Iterationsschritt negative oder zu kleine Lösungsvariablen durch Schrankenwerte ersetzt werden. Während die turbulente kinetische Energie k den Wert null annehmen darf, erfordert die mathematische Formulierung der Modellgleichungen für die spezifische Dissipationsrate ω einen Wert größer null, da ansonsten die Wirbelviskosität nicht mehr definiert ist. Eine einheitliche Festlegung von Schrankenwerten erreicht man nach Rudnik [63] mit der Wahl der 10^{-4} -fachen Anströmwerte der Turbulenzvariablen. Bei der Plattengrenzschicht in Abschnitt 3.4.2 gilt für den Schrankenwert der turbulenten kinetische Energie jedoch $k_{lim} = 0$.

3.4 Verifikationsbeispiele zur Strömungsmechanik

Die Verifikation der Strömungsformulierung erfolgt zunächst für den laminaren Fall. Hierzu dienen die von Schäfer und Turek [67] im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Strömungssimulation auf Höchstleistungsrechnern“ als Benchmarks vorgeschlagenen zweidimensionalen Testfälle 2D-1 und 2D-2. Bei den laminaren Zylinderumströmungen stellt sich im ersten Fall mit $Re = 20$ ein stationärer und im zweiten Fall mit $Re = 100$ ein periodischer Strömungszustand ein. Die Beispiele ermöglichen einen Vergleich mit Ergebnissen verschiedener Arbeitsgruppen, die unterschiedliche Strömungsmodelle und Diskretisierungsverfahren verwenden. Untersucht wird das Konvergenzverhalten bei Verfeinerung von räumlicher und zeitlicher Diskretisierung sowie der Einfluß der Stabilisierung auf das Strömungsfeld.

Das zweite Beispiel, eine im Rahmen des Forschungsprojekts „Efficient turbulence models for aeronautics“ von Hirsch und Shang [29] vorgeschlagene turbulente Plattengrenzschicht, ermöglicht die Überprüfung von Formulierung und Implementierung sowie die Untersuchung der Leistungsfähigkeit des Turbulenzmodells.

3.4.1 Laminare Zylinderumströmung – DFG-Benchmark

Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens der laminaren Strömungsformulierung wird eine zweidimensionale Kreiszyylinderumströmung betrachtet. Der Kreiszyylinder mit dem Durchmesser $D = 0,1 \text{ m}$ befindet sich in einem Kanal der Höhe $H = 0,41 \text{ m}$ in leicht ausmittiger Position. Die horizontale parabelförmige Anströmung der Form $v_\infty(y) = 4v_\infty^m y(H - y)/H^2$ besitzt die maximale Geschwindigkeit v_∞^m in Kanalmitte und die über die Kanalhöhe gemittelte Geschwindigkeit $\bar{v}_\infty = 2v_\infty^m/3$. Das relativ große Rechengebiet im Nachlauf hinter dem Zylinder soll mögliche Einflüsse der Ausflußrandbedingungen auf die Umströmung ausschließen. Bild 3.1 zeigt die Systemkonfiguration mit allen Abmessungen und Randbedingungen.

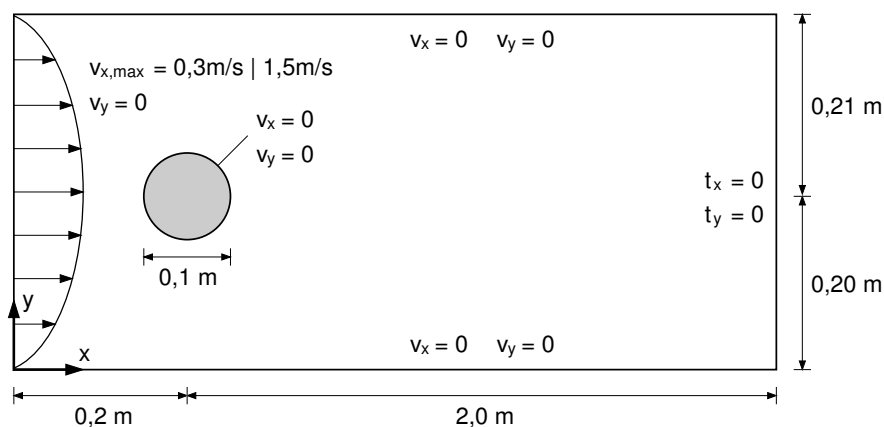


Bild 3.1: Systemkonfiguration für die laminare Zylinderumströmung

Die Dichte des Fluids beträgt $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$ und die Viskosität $\mu = 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$. Mit den auf den Zylinder wirkenden resultierenden Strömungskräften in horizontaler und vertikaler Richtung F_D und F_L folgt die Definition von Widerstands- und Auftriebsbeiwert

$$c_D = \frac{2F_D}{\rho \bar{v}_\infty^2 D} \quad \text{und} \quad c_L = \frac{2F_L}{\rho \bar{v}_\infty^2 D} . \quad (3.50)$$

Die Rückströmlänge L_a gibt im stationären Fall die horizontale Länge des Bereichs hinter dem Zylinder an, in dem das Geschwindigkeitsfeld negative x-Komponenten besitzt. Die Strouhal-Zahl

$$\text{St} = \frac{D}{\bar{v}_\infty T_{St}} \quad (3.51)$$

mit der Ablöseperiode T_{St} dient im periodischen Fall als dimensionslose Frequenz. Die Druckdifferenz Δp gibt den Druckunterschied zwischen den Punkten (0,15; 0,2) und (0,25; 0,2) an und dient wie die zuvor definierten Größen als Vergleichsgröße zur Beurteilung der Simulationsergebnisse. Im periodischen Fall vergleicht man die Maximalwerte von Widerstands- und Auftriebsbeiwert sowie die Druckdifferenz eine halbe Periode nach Auftreten des maximalen Auftriebsbeiwerts.

Die Untersuchung des Konvergenzverhaltens der numerischen Lösung erfolgt für die räumliche Diskretisierung anhand der drei in Bild 3.2 dargestellten Finite-Element-Netze mit 2175, 4343 und 8667 Knoten im Raum und für die zeitliche Diskretisierung durch Variation der Zeitscheibendicke, so daß im periodischen Testfall eine Auflösung von 17, 34 oder 68 Zeitschritten je Periode verwendet wird.

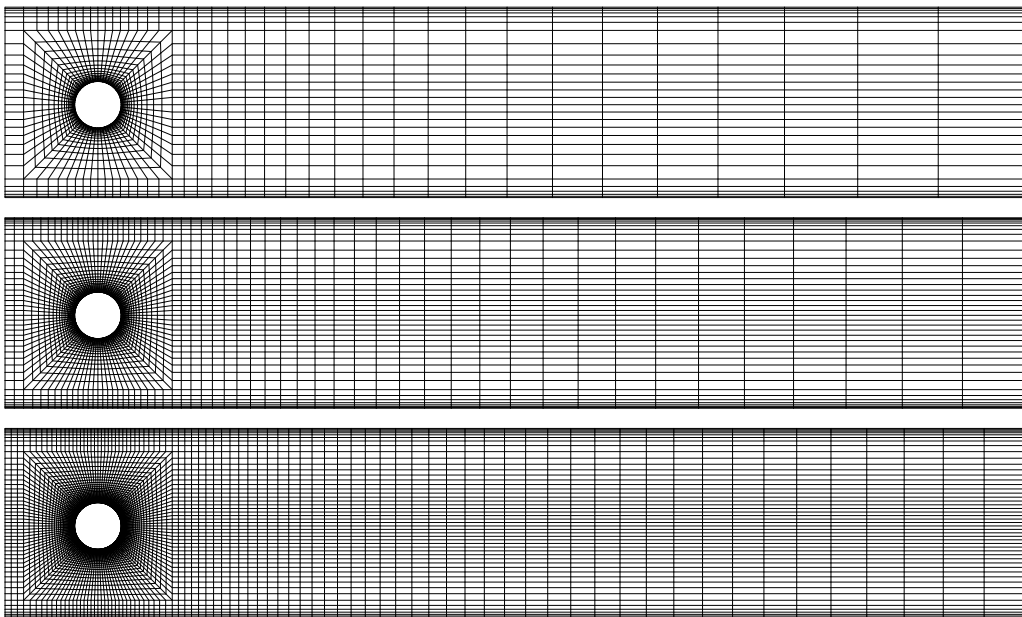


Bild 3.2: Räumliche Finite-Element-Netze mit 2175, 4343 und 8667 Knoten

Im Testfall 2D-1 beträgt die maximale Anströmgeschwindigkeit $v_\infty^m = 0,3 \text{ m/s}$. Die mit der mittleren Anströmgeschwindigkeit $\bar{v}_\infty = 0,2 \text{ m/s}$ und dem Zylinderdurchmesser D definierte Reynolds-Zahl folgt zu $Re = 20$, womit sich ein stationärer Strömungszustand mit konstantem Rückströmbereich hinter dem Zylinder ausbildet.

Die Ergebnisse für die drei verschiedenen feinen Netze sind in Tabelle 3.1 den in [67] angegebenen Grenzwerten gegenübergestellt. Die oberen und unteren Grenzwerte sind Resultat einer statistischen Auswertung der verschiedenen in [67] zusammengestellten Ergebnisse und müssen nicht unbedingt die exakte Lösung einschließen, können aber als Anhaltspunkt dafür dienen. Die vorliegenden Berechnungsergebnisse zeigen monotone Konvergenz und insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung mit den Vergleichswerten. Selbst die mit 2175 Knoten relativ grobe Diskretisierung führt zu brauchbaren Lösungen mit einem deutlich unter 10 % liegenden Fehler.

Knotenanzahl	c_D	c_L	L_a	Δp
2175	5,580	0,0098	0,0867	0,1165
4343	5,573	0,0102	0,0844	0,1168
8667	5,572	0,0104	0,0842	0,1170
untere Grenze	5,570	0,0104	0,0842	0,1172
obere Grenze	5,590	0,0110	0,0852	0,1176

Tabelle 3.1: Ergebnisse für den stationären Fall 2D-1

Eine zusätzliche Berechnung mit der groben Diskretisierung und 0,01-fachen Werten der Stabilisierungsparameter (3.25 – 3.27) soll den Einfluß der Stabilisierung aufzeigen. Das Geschwindigkeitsfeld bleibt fast unverändert, da bei der kleinen Reynolds-Zahl des Beispiels die Auswirkungen von Konvektions- und Kontinuitätsstabilisierung sehr gering sind. Das in Bild 3.3 dem vollständig stabilisierten Fall gegenübergestellte Druckfeld dagegen ist deutlich gestört. Folglich ist bei linearen Ansätzen für Druck und Geschwindigkeiten eine Druckstabilisierung in jedem Fall erforderlich.

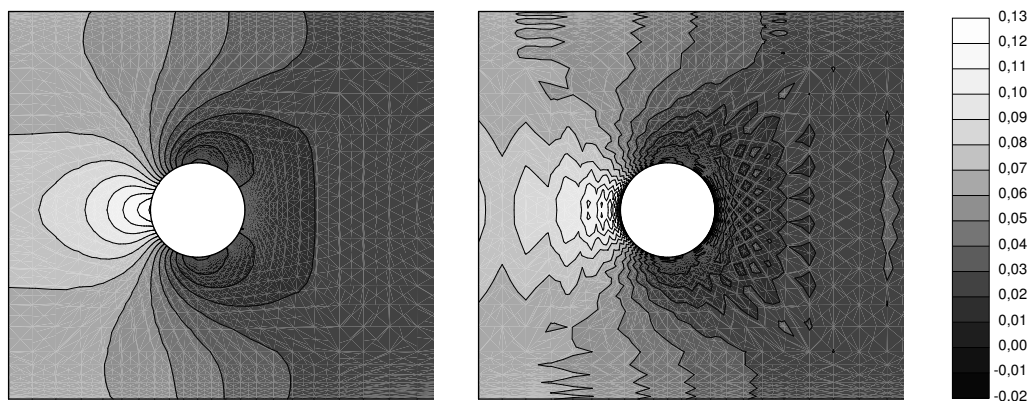


Bild 3.3: Stationäre Druckverteilung bei voller bzw. 0,01-facher Stabilisierung

Im Testfall 2D-2 führt die maximale Anströmgeschwindigkeit $v_\infty^m = 1,5 \text{ m/s}$ auf eine mittlere Geschwindigkeit von $\bar{v}_\infty = 1,0 \text{ m/s}$ und eine Reynolds-Zahl von $Re = 100$, womit ein periodischer Strömungszustand folgt. Bild 3.4 zeigt das Geschwindigkeitsfeld mit der Kármánschen Wirbelstraße im Nachlauf für die räumliche Diskretisierung mit 4343 Knoten.

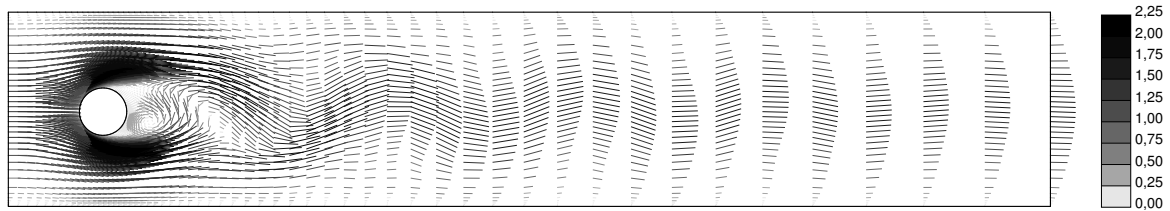


Bild 3.4: Geschwindigkeitsfeld mit Wirbelstraße bei mittlerer Diskretisierung

Neben der Untersuchung des Konvergenzverhaltens der räumlichen Diskretisierung für eine mittlere Zeitscheibendicke, die zu einer Auflösung von ca. 34 Zeitschritten je Periode führt, wird für das feine räumliche Netz die Zeitschrittweite halbiert sowie verdoppelt, um den Einfluß der zeitlichen Diskretisierung abzuschätzen. Die Simulationsergebnisse sind zusammen mit den Grenzwerten nach [67] in Tabelle 3.2 zusammengestellt. Die Ergebnisse zeigen nicht mehr in jedem Fall monotonen Konvergenzverhalten, da infolge unterschiedlicher Werte für die Periodendauer und verschiedener Zeitschrittweiten die zeitlichen Knotenpunkte nicht immer die Maximalwerte der Zeitverläufe treffen. Aber auch hier zeigt sich insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung mit den Vergleichswerten, selbst bei grober räumlicher und zeitlicher Diskretisierung, wobei die hohe Genauigkeitsordnung der zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Formulierung noch bei sehr großen Zeitschritten brauchbare Ergebnisse liefert. Allerdings verschlechtern größere Zeitschritte das Konvergenzverhalten bei der iterativen Lösung der nichtlinearen Gleichungen und der linearisierten Gleichungssysteme, so daß Zeitschrittweiten, die zu sehr effizienten Berechnungen führen, meist die Genauigkeitsanforderungen weit übertreffen.

Knoten	$T_{St}/\Delta t$	$c_{D,\max}$	$c_{L,\max}$	St	Δp
2175	36	3,265	1,152	0,281	2,497
4343	34	3,248	1,083	0,294	2,480
8667	17	3,219	0,988	0,294	2,462
8667	34	3,233	1,021	0,299	2,490
8667	68	3,240	1,037	0,296	2,492
untere Grenze		3,220	0,990	0,295	2,460
obere Grenze		3,240	1,010	0,305	2,500

Tabelle 3.2: Ergebnisse für den periodischen Fall 2D-2

3.4.2 Turbulente Plattengrenzschicht

Zur Verifikation von FE-Formulierung und Implementierung des k - ω -Modells dient die von Klebanoff [40] experimentell untersuchte turbulente Grenzschichtströmung an der längsangeströmten ebenen Platte bei konstantem Druck, für die von Hisch und Shang [29, 30] eine Zusammenstellung von Ergebnissen verschiedener Arbeitsgruppen und Turbulenzmodelle vorliegt. Bild 3.5 zeigt die Systemkonfiguration mit allen Randbedingungen und Materialkennwerten. Die horizontale Anströmung mit der Geschwindigkeit $\bar{v}_\infty = 15,24$ m/s erreicht nach 0,05 m den Anfang einer horizontalen Platte, an der sich zunächst eine laminare Grenzschicht ausbildet, die nach [68] bei $Re_{x,krit} = 3 \cdot 10^5$ bis 10^6 in eine turbulente Grenzschicht umschlägt. Die mit dem Abstand x von der Plattenvorderkante festgelegte Reynolds-Zahl

$$Re_x = \frac{\rho \bar{v}_\infty x}{\mu} \quad (3.52)$$

dient als dimensionsloses Maß für die überströmte Plattenlänge. Das hier verwendete Standard- k - ω -Modell führt theoretisch zu einem Umschlag bei $Re_{x,krit} \approx 10^4$, siehe [84], der sehr nah an der Vorderkante liegt und in der Simulation kaum identifizierbar ist. Eine wirklichkeitsnahe Berechnung des laminar-turbulenten Umschlags erfordert eine Modellerweiterung für den Bereich kleiner Reynolds-Zahlen.

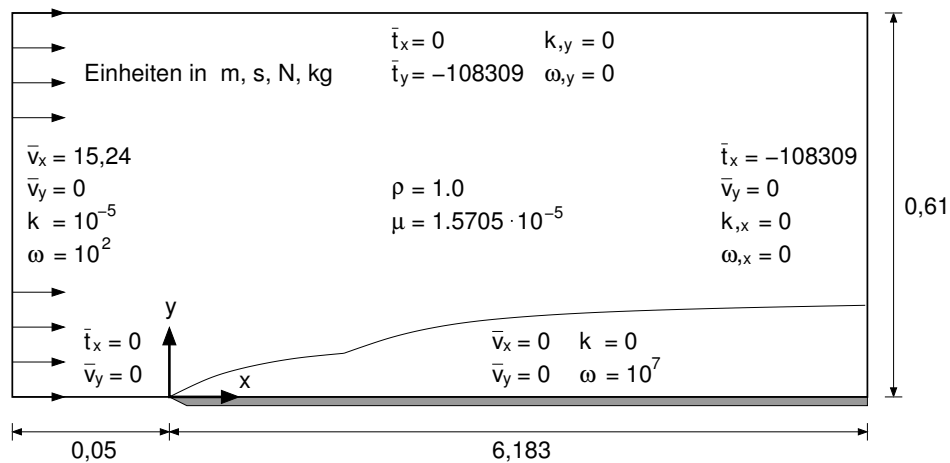


Bild 3.5: Systemkonfiguration für die turbulente Plattengrenzschicht

Die Anströmwerte der Turbulenzvariablen $k_\infty = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^2$ und $\omega_\infty = 10^2 \text{ s}^{-1}$ führen auf eine Wirbelviskosität von $\mu_t = 10^{-7} \text{ Ns/m}^2 \ll 1,5705 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2 = \mu$, die deutlich unterhalb der molekularen Viskosität liegt und keine Auswirkung auf die mittlere Anströmung hat. Am Plattenrand verschwindet die turbulente kinetische Energie. Der Randwert der spezifischen Dissipationsrate von $\omega = 10^7 \text{ s}^{-1}$ entspricht nach (3.42) einer Sandrauhigkeit von $k_s = 6,266 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, womit die für hydraulisch

glatte Wände erforderliche Bedingung (3.43) bei dimensionslosen Wandschubspannungen von $c_f < 0,0135$ erfüllt ist, was nach Bild 3.7 mit Ausnahme der Spitze für den gesamten Plattenrand zutrifft. Dabei ist die dimensionslose Wandschubspannung

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho \bar{v}_\infty^2} \quad (3.53)$$

als Quotient von Wandschubspannung τ_w nach (3.45) und Staudruck definiert.

Die in Bild 3.6 dargestellte räumliche Diskretisierung enthält in horizontaler Richtung 19 Elemente vor und 76 Elemente entlang der Platte. In vertikaler Richtung, über die Dicke der Grenzschicht, besteht das Netz aus 75 Elementen mit einem Größenverhältnis benachbarter Elemente von 1 : 1,15, womit das erste Element am Plattenrand eine Höhe von $\Delta y^1 = 2,6 \cdot 10^{-6}$ m besitzt.

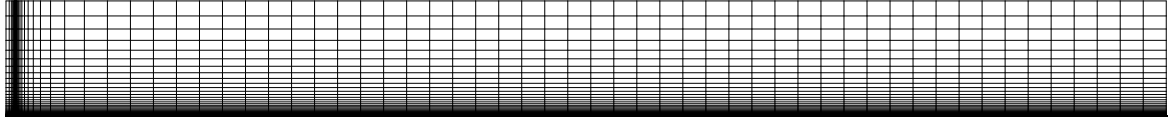


Bild 3.6: Räumliches Finite-Element-Netz mit 7296 Knoten und 7125 Elementen

Die Integration der Modellgleichungen durch die turbulente Grenzschicht bis zum Plattenrand erfordert für den dimensionslosen Wandabstand des ersten Knotens die Einhaltung der Bedingung $y^+(y=\Delta y^1) < 1$, um die viskose Unterschicht richtig auflösen zu können [84]. Mit der gewählten ersten Elementhöhe ist die Bedingung für dimensionslose Wandschubspannungen von $c_f < 0,314$, also im gesamten Bereich der turbulenten Grenzschicht, erfüllt, siehe Bild 3.7. Die Definition des dimensionslosen Wandabstandes

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \quad (3.54)$$

erfolgt mit der Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ nach (3.44).

Um für die mittlere Strömung einen sinnvollen Anfangszustand zu definieren, erfolgt die Lösung der Modellgleichungen zunächst ohne Turbulenzmodell, so daß sich ein laminarer Strömungszustand einstellt, der physikalisch zwar möglich, aber nicht stabil ist. Als Anfangsbedingungen für die Turbulenzvariablen dienen im gesamten Gebiet die Anströmwerte. Anschließend werden die gekoppelten Modellgleichungen mit der Zeitscheibendicke $\Delta t = 0,005$ s in der Zeit gelöst, bis sich ein stationärer Zustand einstellt.

Der Verlauf der dimensionslosen Wandschubspannung c_f über die Plattenlänge ist in Bild 3.7 dem ohne Turbulenzmodell berechneten laminaren Fall gegenübergestellt. Beide Kurven zeigen an der Plattenspitze singuläres Verhalten und verlaufen dann

bis $Re_x \approx 3 \cdot 10^3$ etwa deckungsgleich. Anschließend trennen sich die Verläufe, wobei die laminare Lösung der Theorie von Blasius [68] mit $c_f(x) = 0,664/\sqrt{Re_x}$ folgt und die turbulente Strömung in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen in [28, 30] 10-mal größere Wandschubspannungen hervorruft.

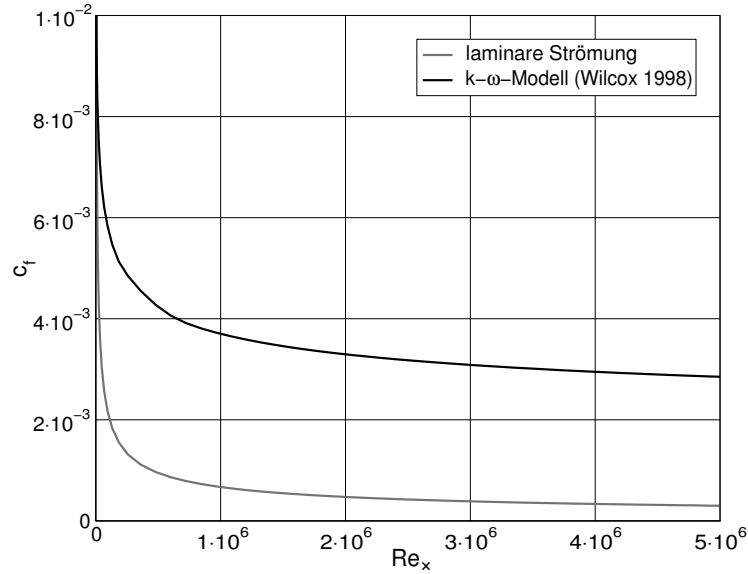


Bild 3.7: Dimensionslose Wandschubspannung

Die Darstellung der Strömungsgrößen über die Grenzschichtdicke erfolgt in dimensionsloser Form, die sich in der Turbulenzmodellierung durchgesetzt hat und einen besseren Vergleich der Ergebnisse ermöglicht. Hierzu werden dimensionslose Grenzschichtgrößen für die mittlere Horizontalgeschwindigkeit und die Schubspannung

$$u^+ = \frac{\bar{v}_x}{u_\tau} \quad \text{und} \quad \tau^+ = \frac{\bar{\tau} + \tau_t}{\tau_w} = \frac{\bar{\tau} + \tau_t}{\rho u_\tau^2} \quad (3.55)$$

sowie die Turbulenzvariablen

$$k^+ = \frac{k}{u_\tau^2} \quad \text{und} \quad \omega^+ = \frac{\mu \omega}{\rho u_\tau^2} \quad (3.56)$$

eingeführt. Die dimensionslose Schubspannung τ^+ ist bezüglich der Wandschubspannung τ_w nach (3.45) normiert und setzt sich aus mittlerer viskoser Schubspannung $\bar{\tau}$ und Reynolds-Schubspannung τ_t zusammen.

Die Bilder 3.8 und 3.9 zeigen Grenzschichtprofile der Strömungsgrößen für eine Grenzschichtentwicklungslänge von $x_0 = 4,3282 \text{ m}$, was einer Reynolds-Zahl von $Re_{x_0} = 4,2 \cdot 10^6$ entspricht. Das turbulente Geschwindigkeitsprofil im linken Diagramm von Bild 3.8 zeigt den typischen Drei-Schichten-Aufbau, bestehend aus viskoser Unterschicht mit $y^+ < 5$, logarithmischer Überlappungsschicht mit $70 < y^+ < 500$

und Defekt- bzw. Kernschicht mit $y^+ > 500$, vergleiche [68, 84]. Zwischen reinviskoser Unterschicht und logarithmischer Überlappungsschicht befindet sich im Bereich $5 < y^+ < 70$ noch eine Übergangsschicht. Die viskose Unterschicht, in der turbulente Schwankungsbewegungen keinen Einfluß haben, besitzt mit $u^+ = y^+$ einen linearen Geschwindigkeitsverlauf, der exakt mit dem laminaren Fall übereinstimmt.

In der Überlappungsschicht hat das logarithmische Wandgesetz

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C^+ \quad (3.57)$$

mit der Kármán-Konstanten $\kappa = 0,41$ und der dimensionslosen Integrationskonstanten C^+ Gültigkeit. Die Konstanten sind aus Messungen bekannt, wobei C^+ von der Wandrauhigkeit abhängt und bei glatten Wänden den Wert $C^+ \approx 5,0$ annimmt. Die gestrichelte Linie im linken Diagramm von Bild 3.8 gilt für den Wert $C^+ = 5,1$, der auch dem k - ω -Modell zugrunde liegt. Die Defekt-Schicht, deren Name auf eine Defekt-Formulierung des Geschwindigkeitsverlaufs gegenüber der Außenströmung zurückgeht, ist von steil abfallenden Verläufen der Reynolds-Spannung und der turbulenten kinetischen Energie geprägt.

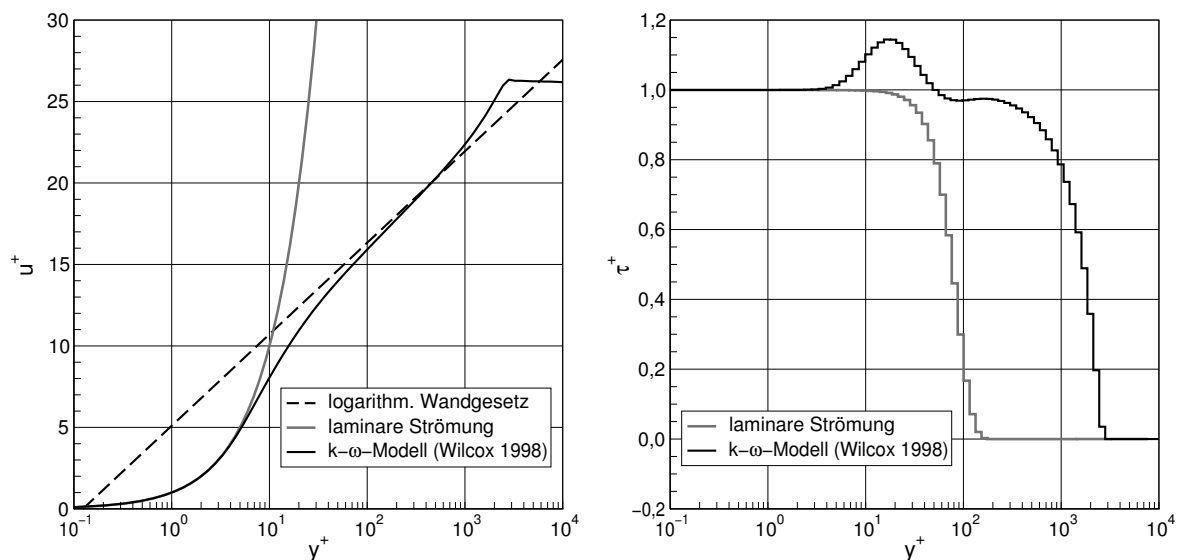


Bild 3.8: Dimensionsloses Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofil für $Re_x = 4,2 \cdot 10^6$

Die Schubspannungsprofile im rechten Diagramm von Bild 3.8 zeigen in der viskosen Unterschicht sowie im laminaren Fall entsprechend der linearen Geschwindigkeitsverteilung einen konstanten Verlauf. In der laminaren Grenzschicht fällt die Schubspannung an der Außenkante dann auf null ab, wobei die Grenzschichtdicke auch in dimensionsbehafteter Darstellung unter Berücksichtigung der deutlich geringeren Wandschubspannung kaum mehr als $1/10$ der turbulenten Grenzschichtdicke

beträgt. Der turbulente Fall führt zu einer erhöhten Schubspannung in der Übergangsschicht, einem nahezu konstanten Verlauf in der Überlappungsschicht und dem Schubspannungsabfall in der Defekt-Schicht.

Die Grenzschichtprofile der turbulenten kinetischen Energie k und der spezifischen Dissipationsrate ω sind in den Diagrammen in Bild 3.9 dargestellt. Die turbulente kinetische Energie verschwindet erwartungsgemäß in der viskosen Unterschicht, steigt in der Übergangsschicht zunächst bis zum Maximalwert an und fällt zur Überlappungsschicht hin wieder leicht ab, wobei Versuchsergebnissen [84] zufolge das Maximum mit $k^+ > 4$ deutlich ausgeprägter ist, als es das k - ω -Modell vorhersagt. In der logarithmischen Überlappungsschicht ist der k -Verlauf nahezu konstant, und in der Defekt-Schicht fällt das Profil dann zur Außenströmung hin auf null ab. Die doppelt-logarithmische Darstellung der spezifischen Dissipationsrate führt auf einen von der Wand bis zur Defekt-Schicht näherungsweise linear abfallenden Verlauf, der erst beim Übergang zur Außenströmung abknickt. In linearer Darstellung folgt damit ein zur Wand hin exponentiell ansteigender Verlauf mit einem sehr großen Gradienten in Wandnähe.

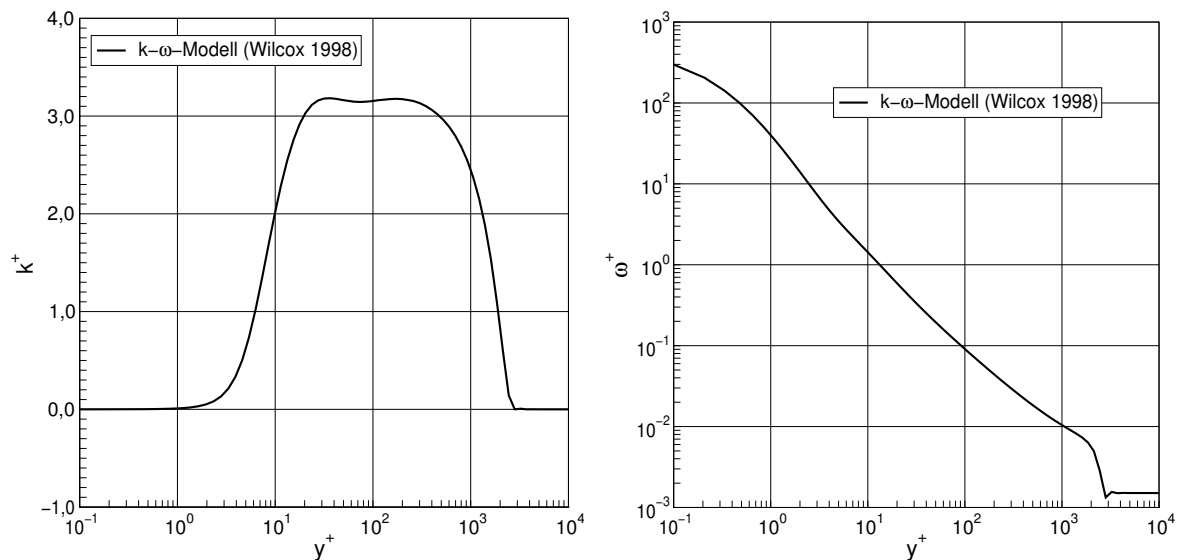


Bild 3.9: Dimensionsloses k - und ω -Profil für $Re_x = 4,2 \cdot 10^6$

Insgesamt zeigen die Ergebnisse eine sehr gute Übereinstimmung mit Lösungen aus der Literatur [28, 30, 63, 84] und bestätigen die Leistungsfähigkeit des k - ω -Modells, turbulente Grenzschichten auch in der Standardversion realistisch zu beschreiben.

4. Kopplung von Struktur und Fluid

4.1 Einführung

Wechselwirkungen von elastischen Strukturen und viskosen Fluiden gehören zur Klasse der Mehrfeld-Aufgaben, denen ein gekoppeltes System unterschiedlicher physikalischer Felder zugrunde liegt. Bei oberflächengekoppelten Aufgaben erfolgt der Informationsaustausch auf einer gemeinsamen Oberfläche von zwei aneinandergrenzenden Feldern, dem Interface. Bei volumengekoppelten Aufgaben belegen verschiedene physikalische Felder das selbe räumliche Gebiet, so daß der Informationsaustausch im gemeinsamen Gebiet stattfindet.

Oberflächengekoppelte Aufgaben aus dem Bereich Fluid-Struktur-Interaktion sind einerseits Umströmungen elastischer Strukturen wie weitgespannte Seilbrücken, leichte Flächentragwerke, Flugzeuge oder Schiffe und andererseits Strömungen in elastischen Strukturen wie Tanks, Pipelines oder Arterien. Bei volumengekoppelten Aufgaben sind in erster Linie Strömungen in porösen Medien zu nennen, wenn sich Form und Eigenschaften der porösen Medien infolge Durchströmungen verändern. Als Beispiel dienen Grundwasserströmungen in Böden oder Sickerströmungen in Mülldeponien, die mit zusätzlichen Feldproblemen wie Transportprozessen oder chemischen Reaktionen gekoppelt sein können. Aber auch die in Abschnitt 3.2 und 3.3 behandelte Modellierung turbulenter Strömungen mit den Reynolds-Gleichungen führt zu einer volumengekoppelten Mehrfeld-Aufgabe, wenn das Turbulenzmodell zusätzliche partielle Differentialgleichungen formuliert.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Kopplungsalgorithmen, die zu einer simultanen Lösung von Fluid und Struktur führen, beziehen sich auf Oberflächenkopplungen von elastischen Strukturen und viskosen Fluiden. Die Methoden und Strategien lassen sich sowohl auf die in der Bauwerksaeroelastik auftretenden umströmten Strukturen als auch auf Strömungen in elastischen Strukturen anwenden. Insbesondere bei starken Wechselwirkungen zwischen den Feldern und einheitlichen Zeitskalen im gesamten System können simultane Verfahren sehr gute Konvergenzeigenschaften aufweisen und eine effiziente Lösung ermöglichen. Jedoch ist der Einsatz vorhandener ausgereifter Löser für die Teilfelder kaum möglich, so daß eine vollständig neue Implementierung des gesamten Berechnungsmodells erforderlich ist.

Im Bereich der Aeroelastik sind in vielen Fällen kritische Anströmgeschwindigkeiten gesucht, oberhalb denen das gekoppelte Gesamtsystem instabil wird oder zumindest sehr große Schwingungsamplituden auftreten. Notwendige Voraussetzung für genaue Stabilitätsuntersuchungen gekoppelter Systeme ist eine numerisch korrekte Übertragung der Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie zwischen den Feldern, da nichtkonservative Kopplungen zu falschen Stabilitätscharakteristiken führen können. Dabei bietet die hier eingesetzte simultane Lösung des gekoppelten Systems die besten Voraussetzungen, um eine konservative Kopplung bei möglichst geringem numerischen Aufwand sicherzustellen.

Die Formulierung der Kopplungsbedingungen erfolgt mit den Bewegungsgrößen der elastischen Struktur und der viskosen Strömung, wobei im turbulenten Fall nur die mittlere Strömung betrachtet wird, da die turbulenten Schwankungsbewegungen an festen Wänden zum Erliegen kommen. Die Turbulenzvariablen beeinflussen im Fluidgebiet die Bewegungsgrößen der mittleren Strömung, gehen aber nicht in die Kopplungsbedingungen auf dem Interface ein. Die Behandlung der Oberflächenkopplung von Reynolds-Gleichungen und Modellgleichungen der Elastodynamik ist daher vollkommen unabhängig von der Volumenkopplung der Reynolds-Gleichungen mit den Turbulenzmodellgleichungen. Folglich gelten die Kopplungsalgorithmen sowohl für Strömungsformulierungen auf Basis der Navier-Stokes-Gleichungen als auch der Reynolds-Gleichungen. Daher ist die Kopplungsformulierung in diesem Kapitel für den laminaren Fall angegeben, womit die Kennzeichnung gemittelter Bewegungsgrößen turbulenter Strömungen durch Überstreichen im weiteren entfällt.

Unabhängig vom Typ der Strömung führen Bewegungen der Struktur zu bewegten Rändern des Strömungsgebiets, da Überschneidungen der beiden Kontinua mit doppelter Massenbelegung oder Löcher ohne Massenbelegung der Modellannahme einer gemeinsamen Grenzfläche zwischen den Teilgebieten widersprechen. Folglich erfordert die Betrachtung der Strömung in der Momentankonfiguration die Lösung der Modellgleichungen in einem zeitveränderlichen räumlichen Gebiet. Das räumliche Finite-Element-Netz der in der Referenzkonfiguration definierten Struktur bleibt unverändert, während der mit der Struktur gekoppelte Rand des Strömungsnetzes den aktuellen Strukturverschiebungen folgen muß. Um eine ausreichende Netzqualität sicherzustellen und Überschneidungen von Elementen auszuschließen, ist auch eine Bewegung der inneren Netzknoten erforderlich.

Der hierfür benötigte Algorithmus zur Netzbewegung, meist auf Basis einer pseudoelastischen Strukturanalyse des Strömungsgebiets, ist als zusätzliches Feldproblem anzusehen, das mit dem Strömungsfeld volumengekoppelt ist. Die Netzdynamik beschreibt im Gegensatz zu Fluid- und Strukturdynamik jedoch kein physikalisches Verhalten, sondern ist eine Folge der unterschiedlichen Betrachtungsweisen.

4.2 Lösungsstrategien für gekoppelte Systeme

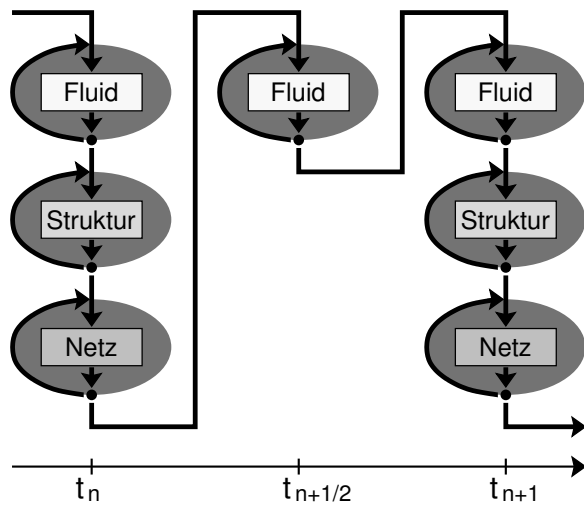
Die Analyse von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit großen Strukturbewegungen erfordert die Lösung einer Drei-Feld-Aufgabe mit den Teilsystemen Strukturmechanik, Fluidmechanik und Netzdynamik. Realistische Modelle der Teilsysteme führen jeweils auf nichtlineare partielle Differentialgleichungen. In der vorliegenden Arbeit sind dies die Modellgleichungen der nichtlinearen Elastodynamik, die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Fluide sowie die lineare Elastostatik zur Bestimmung der Netzbewegung, wobei komplexe dreidimensionale Geometrien z. T. auch nichtlineare Netzbewegungsalgorithmen erfordern.

Neben der Feld-Elimination, bei der die Modellgleichungen der Teilsysteme ineinander eingesetzt werden, was nur bei linearen Modellgleichungen möglich ist und zu numerisch schwer handhabbaren Formulierungen führt, unterscheidet man bei allgemeineren Lösungsansätzen für Mehrfeld-Aufgaben zwischen geschachtelten bzw. schwach gekoppelten partitionierten Lösungen, stark gekoppelten partitionierten Lösungen und simultanen Lösungen. Die drei verschiedenen Lösungsstrategien für Zeitbereichsanalysen sind in Bild 4.1 einander gegenübergestellt, wobei Ellipsen Iterationsschleifen symbolisieren und rechteckige Felder in einem Iterationsschritt zu lösende linearisierte Gleichungssysteme. Bei expliziter Zeitintegration symbolisieren Ellipse und Rechteck zusammen einen Lösungsschritt. Die Pfeile geben den Lösungsweg an, und an den Punkten erfolgen Konvergenzabfragen.

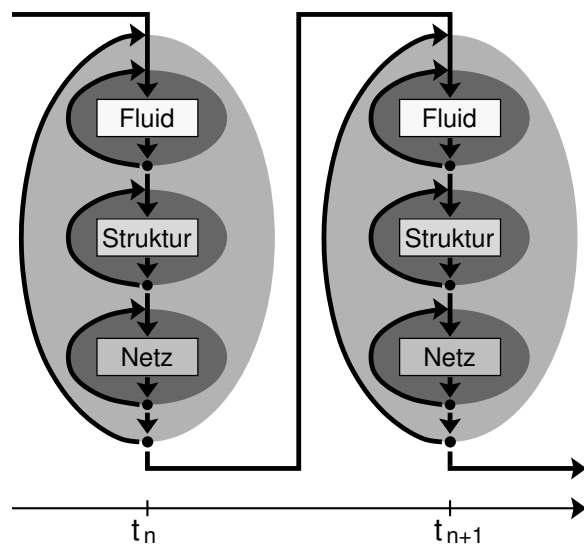
4.2.1 Partitionierte Lösung mit schwacher Kopplung

Partitionierte Verfahren lösen die einzelnen Felder in einer festzulegenden Reihenfolge nacheinander, in der Regel mit ganz unterschiedlichen Programmsystemen und Diskretisierungsverfahren. Für die Teilsysteme können genau zugeschnittene, hochentwickelte Löser eingesetzt werden, die relativ leicht austauschbar sind. Die Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen den Teilsystemen erfolgt über Randbedingungen, was zu Dirichlet-Neumann-Methoden führt, bei denen die Strömungsrandspannungen als Lasten auf die Struktur wirken, die Strukturgeschwindigkeiten als Dirichlet-Bedingungen in der Strömungsformulierung auftreten und die Strukturverschiebungen Dirichlet-Bedingungen für die Netzbewegung sind.

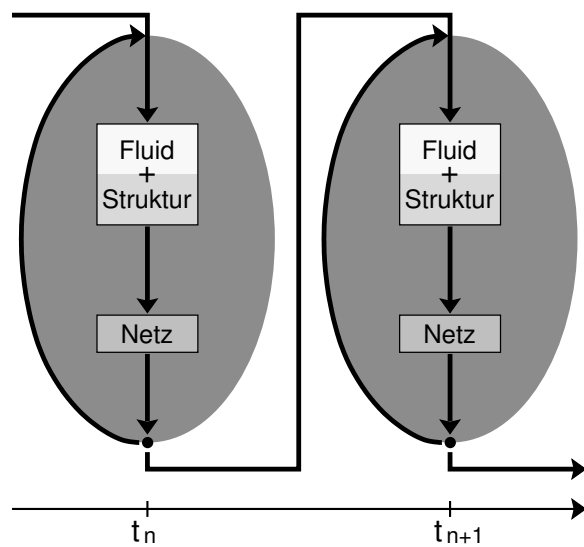
Wenn bei der Zeitbereichslösung des Gesamtsystems der Informationsaustausch zwischen den Teilsystemen nur einmal pro Zeitschritt erfolgt, spricht man von schwach gekoppelten Lösungen. Die relativ einfache Behandlung der Kopplung macht die Methode sehr populär [10, 15, 50, 51, 58, 82], schränkt eine Anwendung auf stark gekoppelte Systeme jedoch deutlich ein, wenn stabile Lösungen nicht oder nur bei sehr kleinen Zeitschrittweiten möglich sind.



Schwach gekoppelte
partitionierte Lösung



Stark gekoppelte
partitionierte Lösung



Simultane Lösung

Bild 4.1: Lösungsstrategien zur Analyse von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen

Da im Zeitschritt keine Iteration über die Teillösungen erfolgt, befindet sich das Gesamtsystem nie in einem konsistenten Zustand. Bei der in Bild 4.1 dargestellten Reihenfolge wird die Strömungslösung mit den Strukturgeschwindigkeiten und der Netzposition des vorhergehenden Zeitschritts bestimmt, wogegen die Strukturlösung von den aktuellen Strömungskräften abhängt. Folglich ist eine numerisch exakte Übertragung der Erhaltungsgrößen nicht sichergestellt, da zwischen Interface-Geschwindigkeiten und Kopplungskräften ein Zeitversatz auftritt und die geometrische Kontinuität zwischen den Feldern verletzt wird. Der Verzicht auf eine zeitgenaue Kopplung ermöglicht jedoch ohne größeren Aufwand die Wahl verschiedener zeitlicher Diskretisierungen für die einzelnen Felder.

4.2.2 Partitionierte Lösung mit starker Kopplung

Eine zeitgenaue Kopplung, die Voraussetzung für konservative Formulierungen ist, erfordert wiederholte Lösungen der Teilsysteme innerhalb eines Zeitschritts, so daß, wie im mittleren Diagramm von Bild 4.1 dargestellt, eine äußere Iterationsschleife durchlaufen wird bis das Gesamtsystem einen konsistenten Zustand erreicht. In diesem Fall spricht man von stark gekoppelten partitionierten Verfahren, bei denen der numerische Aufwand infolge der zusätzlichen Iteration über die Gesamtlösung ansteigt, die aber in der Regel auch bei starken Wechselwirkungen konvergente und genaue Lösungen liefern, siehe [39, 48, 52, 60, 72]. Eine der Aufgabe angepaßte Reihenfolge, in der die Teilsysteme gelöst werden, und eine gezielte Unterrelaxation können das Konvergenzverhalten entscheidend verbessern oder sichern überhaupt erst die Konvergenz der Gesamtlösung.

Der partitionierte Ansatz ist besonders vorteilhaft, wenn das physikalische Verhalten des Gesamtsystems in erster Linie von komplexen Teilsystemen bestimmt wird, die jeweils genau zugeschnittene Lösungsverfahren erfordern. Zeigt das gekoppelte Gesamtsystem jedoch völlig neue Eigenschaften, die bei Betrachtung der Teilsysteme nicht auftreten, etwa wenn die Teilsysteme vollkommen stabil sind und erst deren Zusammenwirken zur Instabilität führt, so können simultane Lösungen der stark gekoppelten Modellgleichungen vorteilhaft sein.

4.2.3 Simultane Lösung

Im Gegensatz zu den partitionierten Lösungsansätzen liegt den simultanen Verfahren eine ganzheitliche Betrachtung von Mehrfeld-Aufgaben zugrunde. Im engeren Sinne erfordern simultane Lösungen die Formulierung und Diskretisierung eines gekoppelten Systems nichtlinearer Differentialgleichungen für die gesamte Mehrfeld-Aufgabe, so daß die Lösung aller Modellgleichungen simultan in einem Gleichungs-

system mit nur einer Iterationsschleife erfolgt. In diesem Fall spricht man auch von monolithischen Lösungsverfahren, die eine ideale Basis für konservative Kopplungsformulierungen bilden. Im weiteren Sinne verwendet man den Begriff simultane Lösung für Verfahren die alle Teilsysteme mit einheitlicher Zeitdiskretisierung in nur einer Iterationsschleife lösen, auch wenn kein Gesamtgleichungssystem aufgebaut wird und verschiedene räumliche Diskretisierungsverfahren zum Einsatz kommen. Auch dieser Fall gewährleistet eine zeitgenaue Kopplung und kann bei starken Wechselwirkungen zur Verbesserung von Konvergenzverhalten und numerischer Effizienz gegenüber partitionierten Lösungen führen, siehe z. B. [1, 7, 21]. In beiden Fällen bestimmt die kleinste aufzulösende Zeitskala die Zeitschrittweite für das Gesamtsystem, womit die Effizienz simultaner Verfahren bei Aufgaben mit extrem unterschiedlichen Zeitskalen in den Teilsystemen abnehmen kann.

Die vorliegende Arbeit verfolgt den monolithischen Lösungsansatz mit einheitlicher Raum-Zeit-Diskretisierung von Struktur und Fluid, siehe auch [27, 81]. Die Netzbeziehung wird, wie im unteren Schema von Bild 4.1 gezeigt, in einem getrennten Gleichungssystem formuliert, da bei Anwendung der Iterationsvorschrift (3.31) auf das Gesamtsystem die linearisierten Strömungsgleichungen eines Iterationsschritts nur von den Netzverschiebungen des vorhergehenden Iterationsschritts abhängen. Auch sichert die Netzdynamik nur die geometrische Kontinuität von Fluid- und Strukturfeld während der Iteration sowie die Überschneidungsfreiheit des Fluidnetzes. Das physikalische Verhalten des Gesamtsystems im aktuellen Zeitschritt beschreiben allein die auskonvergierten Lösungen der in einem Gleichungssystem zusammengefaßten Modellgleichungen von Fluid, Struktur und Kopplungsbedingungen. Die Formulierung in einem Gleichungssystem unter Verwendung einheitlicher Beschreibungsvariablen für Fluid und Struktur eröffnet neue Möglichkeiten, die Eigenschaften des Gesamtsystems sowohl in mathematisch-numerischer als auch in physikalischer Hinsicht zu untersuchen. So kann die Anwendung von Reduktionsverfahren zu vereinfachten Modellen führen, die das charakteristische Verhalten des gekoppelten Systems mit wenigen generalisierten Freiheitsgraden beschreiben, siehe z. B. [12].

4.3 Kopplungsbedingungen

Die einheitliche Formulierung der Modellgleichungen von Struktur und Fluid in den Abschnitten 2.3 und 3.2 mit globalen Geschwindigkeitsvariablen und die identische Diskretisierung mit finiten Raum-Zeit-Elementen bieten bei der Kopplung beste Voraussetzungen für eine numerisch exakte Erhaltung von Masse, Impuls und mechanischer Energie. Bei gleicher Elementierung beider Felder am Interface können die Finite-Element-Netze trotz unterschiedlicher Betrachtungsweisen direkt miteinander verbunden werden, so daß die Geschwindigkeitsfreiwerte auf dem Kopplungsrand

gleichzeitig Fluid- und Strukturgeschwindigkeiten beschreiben. Denn obwohl die Raumkoordinaten der Strukturknoten die unverformte Geometrie der Referenzkonfiguration beschreiben und die Koordinaten der Fluidknoten die verformte Geometrie der Momentankonfiguration geben Geschwindigkeitsfreiwerte und resultierende Knotenkräfte in beiden Fällen die momentanen Werte für den selben Raumpunkt an.

Um eine konservative Kopplung auch bei unterschiedlichen räumlichen Netzen zu ermöglichen und gleichzeitig die in vielen Anwendungen gesuchte Spannungsverteilung auf dem Interface zu bestimmen, erfolgt die Kopplung in dieser Arbeit mit Interface-Elementen. Die Elemente führen Spannungsfreiwerte ein, um die Kontinuität der Geschwindigkeiten in integraler Form zu garantieren. Bei identischer Elementierung erzwingt die Formulierung die Gleichheit der Geschwindigkeitsfreiwerte und liefert zusätzlich den Spannungsverlauf auf dem Interface. Bei unterschiedlichen Elementierungen erfordert eine konservative Kopplung die exakte Auswertung der Integrale, was insbesondere im dreidimensionalen Fall sehr aufwendig ist.

4.3.1 Lokale Form der Kopplungsbedingungen

Eine konservative Kopplung der Modellgleichungen elastischer Festkörper und viskoser inkompressibler Fluide erfordert auf dem Raum-Zeit-Interface

$$P^c = P^F \cap P^S \quad (4.1)$$

die Kontinuität von Kraft- und Weggrößen. Die Definition (4.1) verlangt, daß die Ränder der Momentankonfigurationen von Fluid und Struktur P^F und P^S auf dem Interface deckungsgleich verlaufen. Folglich ist die geometrische Kontinuität des gekoppelten Systems Voraussetzung für die Existenz des Interfaces. Die Bedingung

$$\mathbf{v}^F = \mathbf{v}^S \quad \text{auf } P^c, \quad (4.2)$$

die auf dem Interface die Gleichheit von Fluid- und Strukturgeschwindigkeiten fordert, sichert die Kontinuität der Weggrößen. Und die Bedingung

$$\mathbf{t}_0^S = -\frac{d\Gamma_t}{d\Gamma_0} \mathbf{t}^F \quad \text{auf } P_0^c, \quad (4.3)$$

die die Gleichheit der Randspannungen von Struktur und Fluid fordert, sichert die Kontinuität der Kraftgrößen. Die Transformation zwischen den Spannungen ist erforderlich, um das Kräftegleichgewicht sicherzustellen, da sich der Spannungsvektor der Struktur nach (2.35) auf ein differentielles Flächenelement der Referenzkonfiguration bezieht und der Spannungsvektor des Fluids nach (2.34) auf ein differentielles Flächenelement der Momentankonfiguration. Der Vorzeichenwechsel berücksichtigt die entgegengesetzten Richtungen der äußeren Randnormalenvektoren.

Bei der Interpretation der Kopplungsbedingungen wird Gleichung (4.2) in der Regel als Dirichlet-Bedingung für das Fluid und Gleichung (4.3) als Neumann-Bedingung für die Struktur aufgefaßt, womit die Strukturgeschwindigkeiten dem Strömungsfeld eingeprägt werden und die Strömungsrandspannungen als Lasten auf die Struktur wirken. Die Interpretation entspricht der Anschauung folgt aber nicht zwangsläufig aus den Kopplungsbedingungen, die auch eine umgekehrte Zuordnung von Dirichlet- und Neumann-Bedingung zulassen. Die obenstehenden Bedingungsgleichungen enthalten nur insoweit eine Zuordnung zur Fluid- bzw. Strukturformulierung, als Gleichung (4.2) auf der Momentankonfiguration und Gleichung (4.3) auf der Referenzkonfiguration definiert ist. Die ganzheitliche Betrachtung des gekoppelten Gesamtsystems wird jedoch nicht eingeschränkt, da die Formulierung keine bevorzugten Richtungen für den Informationsfluß zwischen den Feldern einführt. Erst bei Übergang auf die gewichtete Integralformulierung in Verbindung mit unterschiedlichen Diskretisierungen von Fluid und Struktur folgt aus der Wahl einer bestimmten Diskretisierung für die Auswertung der Integrale die Bevorzugung einer bestimmten Richtung bei der Informationsübertragung.

4.3.2 Gewichtete Integralformulierung der Kopplungsbedingungen

Analog zu den Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierungen der Randbedingungen von Struktur (2.49f, g) und Fluid (3.22g, h) folgt die in Raum und Zeit gewichtete Integralformulierung der Kopplungsbedingungen durch Anwendung der Methode von Galerkin. Die diskrete Form der Kopplungsbedingung (4.2) der Geschwindigkeiten für die n-te Raum-Zeit-Scheibe

$$+ \int_{P_n^c} \delta \mathbf{t}^F \cdot (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) dP - \int_{P_n^c} \delta \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{t}^F dP \quad (4.4)$$

ist auf dem Fluidnetz definiert und entspricht formal einer Dirichlet-Randbedingung für das Fluid. Die Interface-Spannungen \mathbf{t}^F , die durch den kinematischen Zwang hervorgerufene Reaktionskräfte beschreiben, sind als Fluidgrößen gekennzeichnet, um einerseits das Vorzeichen festzulegen und andererseits die Verwendung der Ansatzfunktionen der Strömungsdiskretisierung auszudrücken. Das zweite Integral in (4.4) folgt aus der partiellen Integration der Impulsbilanz des Fluids und führt die Interface-Spannungen als zusätzliche Unbekannte ein. In der auf dem Strukturnetz definierten diskreten Form der Kopplungsbedingung (4.3) der Spannungen

$$- \int_{P_{0,n}^c} \delta \mathbf{v}^S \cdot \left(-\frac{d\Gamma_t}{d\Gamma_0} \mathbf{t}^F \right) dP_0 \quad (4.5)$$

werden die Interface-Spannungen \mathbf{t}^F der Struktur eingeprägt, womit der Ausdruck (4.5) formal einer Neumann-Randbedingung für die Struktur entspricht.

Die Auswertung der in Raum und Zeit gewichteten Integralformulierungen von Struktur (2.49), Fluid (3.22) und Kopplungsbedingungen (4.4, 4.5) mit den gewählten Ansätzen führt auf das in Bild 4.2 gezeigte gekoppelte Gesamtgleichungssystem, wobei Freiwerte und zugehörige Matrixeinträge des nur im Fluidgebiet definierten Drucks nicht dargestellt sind. Die Kopplung erfolgt vollständig über die linke Seite, so daß die Systemmatrix das Verhalten des Gesamtsystems beschreibt.

Bild 4.2: Gekoppeltes Gesamtgleichungssystem

Die diskrete Form der Geschwindigkeitskopplung (4.4) enthält keine Hauptdiagonaleinträge, womit die Kopplungsbedingung einer Nebenbedingung entspricht, die auf dem Interface die Gleichheit der Geschwindigkeiten erzwingt. Folglich führen die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten gleichen Ansätze für beide Geschwindigkeiten und für die Interface-Spannungen zu identischen Geschwindigkeitsfreiwerten von Fluid und Struktur. In diesem Fall sind die in Bild 4.2 dargestellten Kopplungsmatrizen $\hat{\mathbf{B}}_F$, $\hat{\mathbf{B}}_S$ und $\hat{\mathbf{B}}_S^*$ symmetrisch und identisch, womit der Informationsaustausch zwischen Fluid und Struktur in beiden Richtungen ohne Unterschied erfolgt. Und wenn am Ende der Iteration in einer Zeitscheibe die Strukturbewegung mit der Bewegung des Strömungsnetzes auf dem Interface übereinstimmt, so daß die geometrische Kontinuität numerisch exakt erfüllt ist, dann ist die Erhaltung von Masse, Impuls und mechanischer Energie auf dem Interface auch lokal numerisch exakt erfüllt.

Besteht die Struktur aus einem federnd gelagerten Starrkörper, entsprechend dem Starrkörpermodell in Abschnitt 2.2, so wird der Polygonzug, der den Starrkörperrand beschreibt, in Übereinstimmung mit der Elementierung des Strömungsrandes gewählt. Die Kopplung mit der Fluidformulierung erfolgt analog zu den Ausführungen in diesem Abschnitt. Zusätzlich ist die Kinematik zwischen den Starrkörperfreiwerten und den Knotengeschwindigkeiten des Polygonzugs, sowie die resultierende Wirkung der Interface-Spannungen auf den Starrkörper nach Gleichung (2.27) und (2.28) zu berücksichtigen. Nähere Angaben zu Starrkörperkinematik und Starrkörper-Fluid-Kopplung sind der Arbeit von Walhorn [81] zu entnehmen.

4.4 Veränderliches Strömungsgebiet

Die Forderung nach geometrischer Kontinuität des gekoppelten Systems hat zur Folge, daß Bewegungen der Struktur zu bewegten Rändern des Strömungsgebiets führen, womit die in der Momentankonfiguration formulierten Modellgleichungen der Strömung in einem zeitveränderlichen räumlichen Gebiet zu lösen sind. Die Berücksichtigung des zeitveränderlichen Gebiets erfolgt bei der Diskretisierung der Modellgleichungen mit der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode, siehe [6, 75] bzw. Abschnitt 1.3.1 der Einleitung. Das Konzept der isoparametrischen Raum-Zeit-Elemente mit Formfunktionen zur Beschreibung der Elementgeometrie in Raum und Zeit nach Gleichung (1.1) bzw. (2.57) erlaubt die Integration der Modellgleichungen im veränderlichen Raum-Zeit-Gebiet, so daß eine mit den gewählten Formfunktionen beschreibbare Bewegung des räumlichen Gebiets numerisch exakt erfaßt wird. Die Formulierung der zu diskretisierenden Modellgleichungen erfolgt weiterhin in der Eulerschen Darstellung, und die Bewegung des räumlichen FE-Netzes geht allein in die Jacobi-Matrizen der Raum-Zeit-Elemente ein.

Neben der Fluid-Struktur-Interaktion sind Strömungen mit freien Oberflächen ein wichtiges Anwendungsgebiet für Strömungslöser, die auf bewegten Netzen arbeiten. Auch für diesen hier nicht weiter betrachteten Fall sind Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierungen besonders geeignet, siehe z. B. [23, 76, 81].

4.4.1 Analogie zur ALE-Formulierung

Semidiskrete Verfahren, die getrennte Diskretisierungen für Raum und Zeit verwenden, berücksichtigen die Netzbewegung in der Regel im Rahmen einer ALE- (arbitrary Lagrangian-Eulerian-) Formulierung, bei der die Netzgeschwindigkeit in die Modellgleichungen eingeht. Die Analogie von Raum-Zeit- und ALE-Formulierung wird deutlich, wenn man die lokale, also für einen festen Raumpunkt geltende Zeitableitung in der Raum-Zeit-Formulierung durch Auswerten der Jacobi-Matrizen der Elemente in zwei Anteile zerlegt, siehe [6, 22, 81]. Der erste Anteil enthält die Ableitung nach der lokalen Zeitkoordinate τ und formuliert die zeitliche Änderung der Knotenwerte bzw. die Zeitableitung für konstante lokale Raumkoordinaten ξ . Der zweite, die Ableitungen nach den lokalen Raumkoordinaten beinhaltende Anteil berücksichtigt die Bewegung der Knoten bzw. des räumlichen Netzes und entspricht einem mit negativen Netzgeschwindigkeiten formulierten Konvektionsterm, wie er explizit in ALE-Formulierungen auftritt.

Auch die Strömungsformulierung mit Raum-Zeit-Elementen enthält die Spezialfälle einer Eulerschen Betrachtungsweise, wenn die lokale Zeitkoordinate parallel zur globalen verläuft, sowie einer Lagrangeschen Betrachtungsweise, wenn die lokale

Zeitkoordinate der Bewegung der Strömungsteilchen folgt. Für den Fall der Lagrangeschen Formulierung zeigt Hansbo [23, 24], daß sich bei Verwendung superparametrischer Elemente, deren Geometrieinterpolation in der Zeit eine Polynomordnung höher ist als der Geschwindigkeitsansatz, die Anteile aus Konvektion und Netzgeschwindigkeit exakt aufheben.

Um sicherzustellen, daß sich die Konservativitätseigenschaften eines Diskretisierungsverfahrens bei der Lösung von Strömungsgleichungen auf bewegten Netzen nicht verschlechtern, ist die Bedingung des Raumerhaltungsgesetzes, das in englischsprachiger Literatur „geometric conservation law“ (GCL) genannt wird, zu erfüllen, siehe [16]. Das GCL entspricht der Forderung an ein numerisches Lösungsverfahren, konstante Strömungszustände auch auf beliebig bewegten Netzen im gesamten Zeitbereich exakt abbilden zu können. Farhat et al. [14] zeigen, daß die Erfüllung des GCL keinen zusätzlichen numerischen Aufwand erfordert, sondern allein durch Wahl geeigneter, auf die diskrete Beschreibung der Netzbewegung angepaßter Zeitintegrationsverfahren erfolgen kann. Um den Zusammenhang mit der zeitlichen Diskretisierung besser auszudrücken, wird der Begriff diskretes Raumerhaltungsgesetz (DGCL) verwendet. Dabei stellt das DGCL für semidiskrete ALE-Formulierungen eine notwendige und hinreichende Bedingung dar, um bei der Lösung der nichtlinearen Modellgleichungen auf bewegten Netzen die Stabilitätseigenschaften zu erhalten, die die Lösungsverfahren auf festen Netzen besitzen.

Raum-Zeit-Finite-Element-Diskretisierungen dagegen erfüllen stets das Raumerhaltungsgesetz, siehe [47], da die Integration über das von jedem Element aufspannte Raum-Zeit-Volumen erfolgt. Erforderlich sind nur hinreichend genaue numerische Integrationsregeln im Element, die eine exakte Integration der Wichtungsfunktionen ermöglichen, was bei zwei Gaußpunkten und linearen Formfunktionen für Geometrie und Wichtung gegeben ist. Die automatische Erfüllung des GCL unterstreicht, daß die Anwendung der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode auf eine ganz natürliche und elegante Diskretisierung von Erhaltungsgleichungen in zeitveränderlichen räumlichen Gebieten führt, bei der die Netzbewegung direkt in die Jacobi-Matrizen der Elemente eingeht.

4.4.2 Netzbewegung

Mit der aus der Strukturbewegung folgenden Bewegung des Strömungsrandes ist das zeitveränderliche Strömungsgebiet eindeutig bestimmt. Um eine ausreichende Qualität des räumlichen Finite-Element-Netzes sicherzustellen und Überschneidungen von Elementen auszuschließen, reicht eine Verschiebung der Randknoten bei großen Strukturbewegungen jedoch nicht aus. Vielmehr ist eine geeignete Verschiebung aller Netzknoten bei Erhalt der Netztopologie oder sogar eine Neuvernetzung erforderlich.

Die Bestimmung neuer Koordinaten der inneren Netzknoten bei vorgegebenen Randverschiebungen kann mit unterschiedlichen Netzbewegungsalgorithmen erfolgen. Auf heuristischer Basis entwickelte Glättungsalgorithmen, die Randverschiebungen möglichst gleichmäßig über das Netz verteilen, sind bei mäßigen Verformungen zweidimensionaler strukturierter Netze sehr effizient einsetzbar, können aber bei großen eingprägten Rotationen schnell versagen und häufige Neuvernetzungen erfordern.

Ein allgemeinerer, auch für extrem unstrukturierte und dreidimensionale Netze einsetzbarer Ansatz, der weit verbreitet ist und hier zum Einsatz kommt, besteht in der Betrachtung des Strömungsgebiets als pseudo-elastische Struktur. Die Analyse der Pseudo-Struktur erfolgt mit finiten Elementen unter Verwendung des räumlichen Fluidnetzes, wobei die realen Strukturverschiebungen auf dem Interface der Pseudo-Struktur als Dirichlet-Randbedingungen eingprägung werden und der äußere Rand des Fluidnetzes festgehalten wird, siehe Bild 4.3.

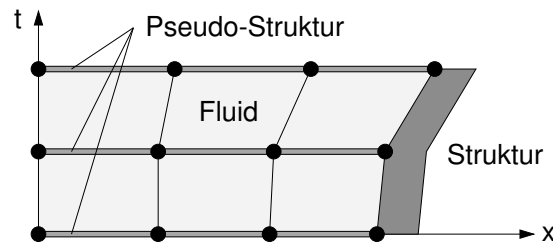


Bild 4.3: Pseudo-Struktur-Analyse für die Netzbewegung

Die Anwendung der linearen Elastizitätstheorie zur Bestimmung der Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_N$ des räumlichen Fluidnetzes führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\hat{\mathbf{K}}_N \hat{\mathbf{u}}_N = \hat{\mathbf{b}}_N \quad (4.6)$$

mit der Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_N$ der Pseudo-Struktur und der rechten Seite $\hat{\mathbf{b}}_N$, in der die eingprägten Randverschiebungen eingearbeitet sind. Wenn alle Elemente des Strömungsnetzes ungefähr die gleiche Größe besitzen, bietet sich eine konstante Steifigkeitsverteilung in der Pseudo-Struktur an.

Bei Strömungsanalysen viskoser Fluide variieren die Elementgrößen innerhalb des Netzes in der Regel jedoch deutlich. Insbesondere müssen bei turbulenten Strömungen die Elemente in Grenzschichten, wie sie an festen Rändern oder Strukturoberflächen auftreten, um mehrere Größenordnungen kleiner sein als im Bereich der Außenströmung. Hier ist eine zur Elementgröße inverse Steifigkeitsverteilung vorteilhaft, so daß die strukturnahen Bereiche mit sehr feiner Elementierung extrem steif sind und die eingprägten Interface-Verschiebungen in erster Linie von großen Elementen am Rand des Strömungsgebiets aufgenommen werden. Ein Maß für die Elementgröße liefert die Determinante der Element-Jacobi-Matrix, so daß man die gewünschte

Steifigkeitsverteilung erhält, wenn man bei der numerischen Integration über die Elemente die Jacobi-Determinanten nicht berücksichtigt. Um die Steifigkeitsverteilung gezielt an unterschiedliche Beispiele anpassen zu können, wird hier jedoch ein von der kleinsten Kantenlänge h abhängiger, elementweise konstanter Elastizitätsmodul $E(h)$ eingeführt. Die Abhängigkeit der Steifigkeit von der kleinsten Kantenlänge ist bei sehr dünnen, langgestreckten Elementen, wie sie in der Strömungsgrenzschicht auftreten, vorteilhaft. Der Verlauf des Elastizitätsmoduls

$$E(h) = E_{\min} + \frac{1/f(h) - 1/h_{\max}}{1/h_{\min} - 1/h_{\max}} (E_{\max} - E_{\min}) \quad (4.7)$$

folgt einer Hyperbel, die so angepaßt ist, daß bei minimaler Elementgröße h_{\min} die maximale Steifigkeit E_{\max} und bei maximaler Elementgröße h_{\max} die minimale Steifigkeit E_{\min} folgt. Die extremalen Steifigkeiten sind mit $E_{\max} = 10^5 E_{\min}$ gewählt. Für die zur Feinanpassung des Verlaufs einsetzbare Formfunktion $f(h)$ gilt hier

$$f(h) = h_{\min} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{h - h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}}} \right) (h_{\max} - h_{\min}) . \quad (4.8)$$

In Bild 4.4 sind Steifigkeitsverteilungen gemäß Gleichung (4.7) für den Fall $f(h) = h$ sowie bei Anwendung der Formfunktion (4.8) dargestellt, wobei die extremalen Elementabmessungen des Anwendungsbeispiels aus Abschnitt 5.3 mit $h_{\max} = 400 h_{\min}$ zugrundeliegen. Für das Beispiel, in dem sich ein umströmter starrer Brückenquerschnitt um bis zu $\alpha = 40^\circ$ verdreht, sind in Bild 4.5 die räumlichen FE-Netze des Strömungsgebiets in der Ausgangskonfiguration und bei verdrehtem Querschnitt gezeigt, woraus die Leistungsfähigkeit des Pseudo-Struktur-Ansatzes in Verbindung mit der vorgeschlagenen Steifigkeitsverteilung ersichtlich wird.

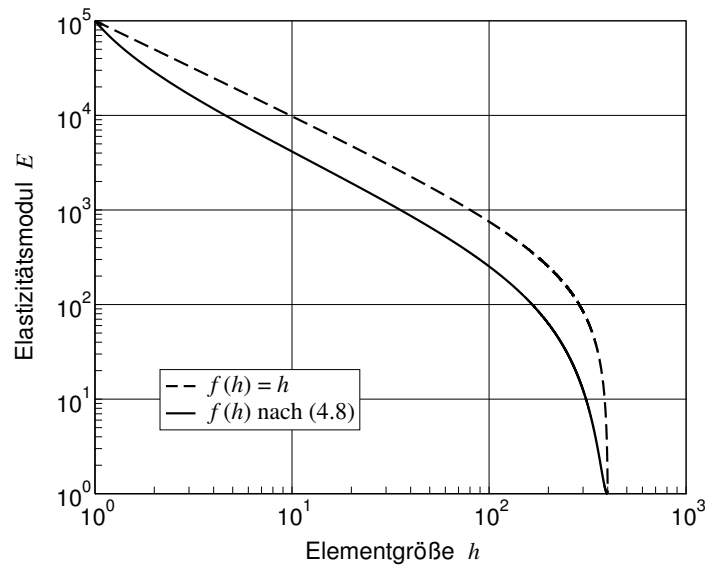


Bild 4.4: Steifigkeitsverteilungen nach Gl. (4.7) für $E_{\max} = 10^5 E_{\min}$ und $h_{\max} = 400 h_{\min}$

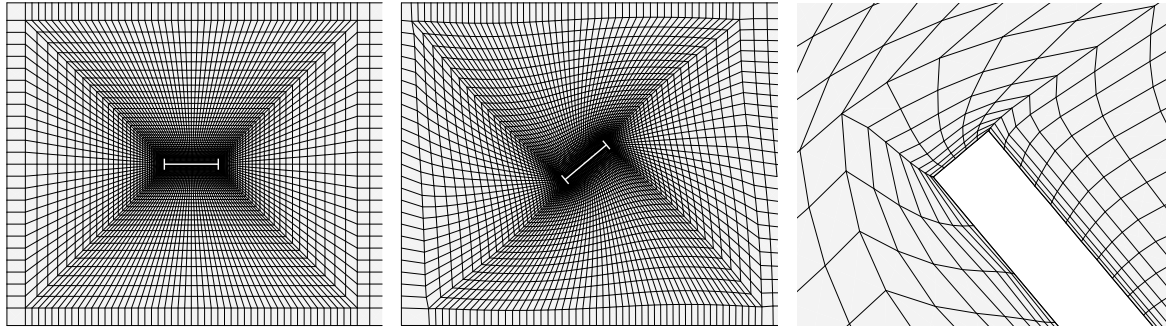


Bild 4.5: Räumliche FE-Netze bei unverformter und verformter Struktur, Detail

Die lineare Berechnung der Pseudo-Struktur erfolgt immer auf der Referenzkonfiguration, d. h. die aktuellen Strukturverschiebungen werden dem Ausgangsströmungsnetz eingeprägt, das möglichst nur Elemente mit gutartiger Geometrie aufweisen sollte. Damit können sich Netzverschlechterungen im Verlauf der Simulation nicht aufsummieren, und bei Verwendung eines direkten Gleichungslösers kann man die einmal zerlegte Systemmatrix abspeichern. Die Speicherung der zerlegten Systemmatrix ist jedoch nur für relativ kleine, zweidimensionale Beispiele, wie sie in dieser Arbeit untersucht werden, möglich. In diesem Fall ist der numerische Aufwand für die in jedem Iterationsschritt erfolgende Pseudo-Struktur-Analyse vernachlässigbar.

Reicht der Pseudo-Struktur-Ansatz auf Basis der linearen Elastizitätstheorie nicht mehr aus, um eine ausreichende Netzqualität sicherzustellen oder zumindest Überschneidungen von Elementen zu verhindern, kann man zunächst spezielle nichtlineare Strukturbeschreibungen einsetzen, die beispielsweise positive Elementvolumina garantieren. Treten dennoch entartete Elemente auf oder ist eine Beschreibung der aktuellen Geometrie auf Basis der bestehenden Netztopologie nicht mehr möglich, etwa wenn sich die Topologie der Struktur infolge Kontakt oder Rißbildung ändert, so ist eine Neuvernetzung unumgänglich. In diesem Fall bietet die zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Formulierung schon die Grundlage für die Projektion der bestehenden Lösung auf das neue Netz. So ist in der diskreten Formulierung der neuvernetzten Zeitscheibe nur der Sprungterm (3.22d) mit der auf dem alten Netz definierten Lösung auszuwerten. Eine exakte Integration der alten Lösung auf dem neuen Netz ist jedoch sehr aufwendig, so daß in der Regel die bestehende Lösung nur an den Gaußpunkten des neuen Netzes ausgewertet wird, wodurch die Konservativität der Zeitintegration abnehmen kann.

In jedem Fall erfordern Neuvernetzungen eine Zuordnung der Elemente des alten Netzes zu den neuen Elementen, die sie teilweise überdecken. Hierfür bieten sich Baumstrukturen zur Speicherung der Elemente an, welche die Grundlage für effiziente Suchalgorithmen bilden, siehe [49].

4.5 Verifikationsbeispiel zur Kopplung

Um Formulierung und Implementierung von Kopplungsbedingungen und Netzbewegung, sowie die Berücksichtigung des veränderlichen Strömungsgebiets bei der Integration der Modellgleichungen zu überprüfen, wird die in Bild 4.6 dargestellte Kanalströmung untersucht. Am linken Rand des 10 m langen Kanals befindet sich ein Stempel, der als sehr steife und fast masselose Struktur modelliert wird. Am rechten Rand kann das Fluid den Kanal bei einem Außendruck von $p = 0 \text{ N/m}^2$ verlassen. An den Seitenrändern sind in horizontaler Richtung homogene Neumann-Bedingungen definiert, womit Wandschubspannungen verschwinden und der Reibungseinfluß entfällt. In vertikaler Richtung sind alle Geschwindigkeiten mit $v_y = 0 \text{ m/s}$ vorgegeben, so daß ein eindimensionaler Strömungszustand vorliegt.

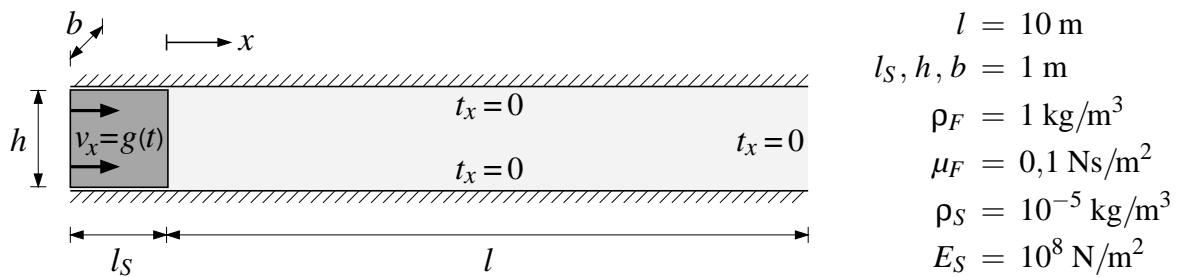


Bild 4.6: Systemskizze zum Kopplungsbeispiel

Die am linken Rand des Stempels eingeprägte Horizontalgeschwindigkeit $g(t)$ verläuft in der Beschleunigungsphase bis $t = 2 \text{ s}$ parabelförmig und nimmt anschließend den konstanten Wert $v_x = 1 \text{ m/s}$ an. Bis zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$ folgt die Geschwindigkeit einer positiv gekrümmten quadratischen Parabel und im Bereich $1 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$ einer negativ gekrümmten, so daß für Geschwindigkeit und Beschleunigung nach einer Sekunde $v_x = 0,5 \text{ m/s}$ und $\dot{v}_x = 1 \text{ m/s}^2$ gilt. Der Zeitverlauf entspricht dem im linken Diagramm von Bild 4.8 dargestellten Geschwindigkeitsverlauf des Interfaces, der ebenso für alle Fluidteilchen gilt, da der Stempel nahezu starr und das Fluid inkompressibel ist.

Die Diskretisierung des Modells erfolgt mit einem Strukturelement für den Stempel, einem Interface-Element zwischen Stempel und Kanal sowie 10 Navier-Stokes-Elementen für die Kanalströmung. Dabei haben Konvektions- und Viskositätsterme sowie Verzerrungen der Struktur keinen Einfluß, womit die Nichtlinearitäten in den Modellgleichungen von Struktur und Fluid entfallen, wenn die Bewegung des Fluidgebiets bekannt ist. In der Simulation wird die Geschwindigkeit jedoch nur am linken Rand des Stempels eingepreßt, und die Bestimmung der Netzbewegung erfolgt mit dem Pseudo-Struktur-Algorithmus nach Abschnitt 4.4.2. Eine auskonvergierte Strömungslösung erfordert in der Beschleunigungsphase zwei und anschließend einen

Iterationsschritt, da die Netzverschiebungen im ersten Iterationsschritt mit den Netzgeschwindigkeiten der letzten Zeitscheibe vorgeschätzt werden. Bild 4.7 zeigt die Momentankonfigurationen von Struktur und Fluid und die Druckverteilung im Fluid zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$ und 6 s bei einer Zeitscheibendicke von $\Delta t = 0,002$ s. Wenn der Stempel nach 6 Sekunden die Hälfte des Fluids aus dem Kanal herausgedrückt hat, endet die Berechnung.

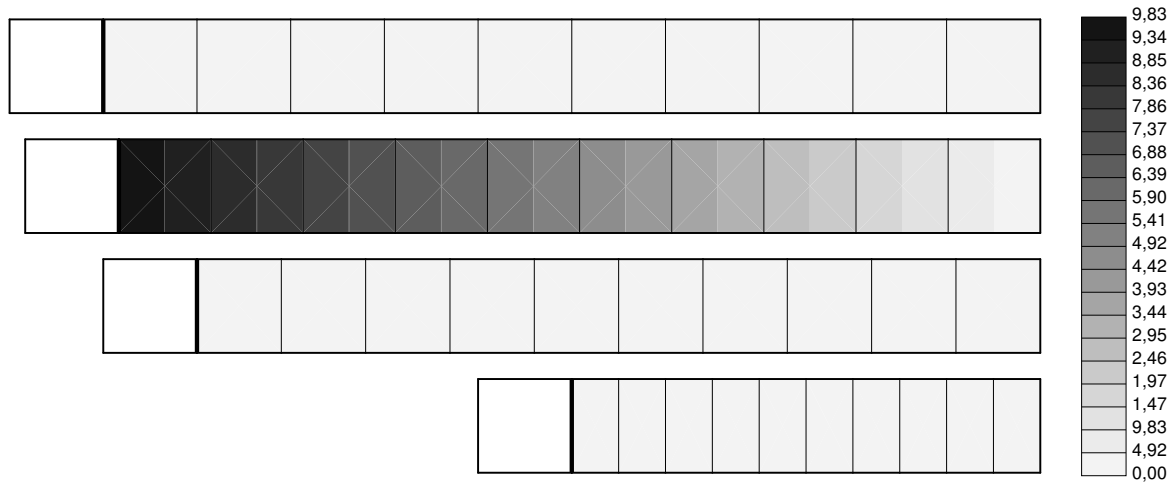


Bild 4.7: Momentankonfigurationen mit Druckfeldern für $t = 0$ s, $t = 1$ s, $t = 2$ s und $t = 6$ s

Das Systemverhalten wird allein von den Trägheitskräften beherrscht, die aus der Beschleunigung der aktuellen Fluidmasse resultieren und mit der Druckverteilung im Gleichgewicht stehen müssen. Daher stellt sich während der Beschleunigung eine räumlich lineare Druckverteilung ein. Und nach Erreichen der Endgeschwindigkeit nimmt das gesamte Druckfeld den Wert des Außendrucks von $p = 0$ N/m² an.

In Bild 4.8 sind im linken Diagramm die Zeitverläufe von Interface-Verschiebung und Geschwindigkeit für eine Zeitscheibendicke von $\Delta t = 0,002$ s dargestellt. Der Geschwindigkeitsverlauf gilt für alle Freiwerte von Struktur und Fluid, da die dem Stempel eingeprägte Geschwindigkeit infolge der simultanen Lösung schon im ersten Iterationsschritt auf das gesamte System übertragen wird. Das rechte Diagramm zeigt den Zeitverlauf des Druckes am Interface für zeitliche Diskretisierungen von $\Delta t = 0,2$ s und $\Delta t = 0,002$ s, wobei der Strömungsdruck am Interface mit der Randspannung des Interfaces und der Normalspannung in der Struktur übereinstimmt. Für die analytische Lösung des zeitlichen Druckverlaufs am Interface gilt nach dem Impulssatz die Beziehung $p = \rho_F (l - u_x) \dot{v}_x$. Zum Zeitpunkt $t = 1$ s der maximalen Beschleunigung $\dot{v}_x = 1$ m/s² und der horizontalen Interface-Verschiebung $u_x = 1/6$ m folgt der analytische Maximalwert des Drucks von $p = 9,833$ N/m². Da die Beschleunigung linear zu- bzw. abnimmt und der Zeitverlauf der Interface-Verschiebung jeweils einem Polynom 3. Ordnung folgt, gehorcht der Druckverlauf während der

Beschleunigung abschnittsweise einem Polynom 4. Ordnung. Die Abweichung vom linearen Verlauf ist jedoch klein, da die Fluidmasse in der Beschleunigungsphase nur um ein Zehntel abnimmt.

In der numerischen Lösung führt der innerhalb einer Zeitscheibe lineare Geschwindigkeitsansatz auf einen konstanten Beschleunigungsverlauf, wogegen die Bewegung des Strömungsgebiets und somit die zeitliche Entwicklung der Fluidmasse linear approximiert wird. Zusammen folgt der in Bild 4.8 dargestellte zeitdiskontinuierliche Druckverlauf mit leicht abfallenden Stufen. Im zeitlichen Mittel stimmt die Lösung der groben Zeitdiskretisierung sehr gut mit der feinen Lösung überein, da die Genauigkeit infolge zeitdiskontinuierlicher Galerkin-Formulierung einem quadratischen Geschwindigkeitsansatz und folglich einer linearen Beschleunigung entspricht.

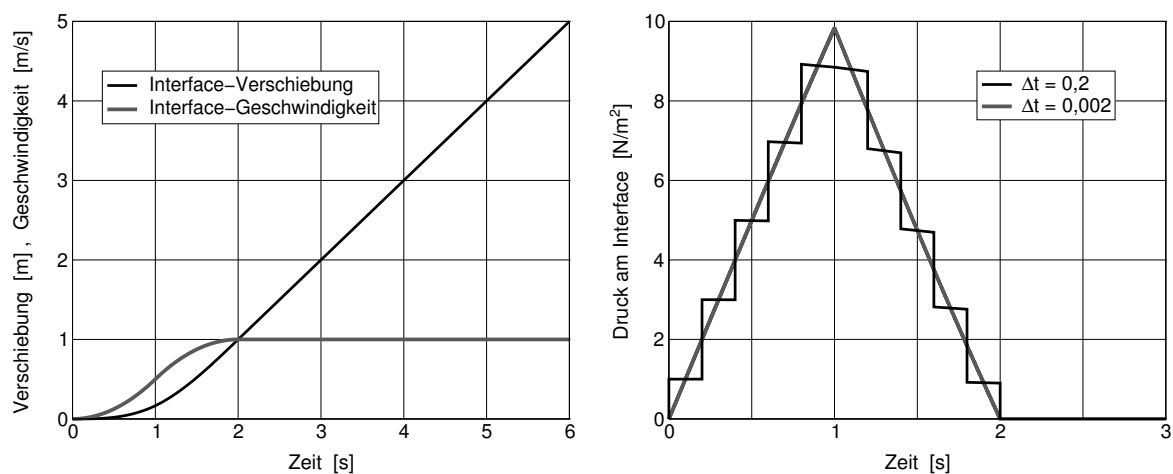


Bild 4.8: Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Druckverlauf am Interface

Das Beispiel bestätigt die im Rahmen der gewählten Ansätze exakte Kopplung von Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Randspannungen zwischen Struktur und Fluid. Die Erfüllung der Kopplungsbedingungen für Geschwindigkeiten und Spannungen ist infolge linearer Modellgleichungen in jedem Iterationsschritt gesichert, wogegen die Übertragung der Strukturverschiebungen auf das Strömungsgebiet nichtlinear in die Strömungsformulierung eingeht und bei ungleichförmigen Strukturbewegungen eine iterative Lösung erfordert. Folglich garantiert das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren zur simultanen Lösung von Fluid und Struktur gemeinsam mit der integralen Formulierung der Kopplungsbedingungen am Ende der Iteration ein konsistentes Geschwindigkeitsfeld und die numerisch exakte Erfüllung der globalen Impulsbilanz des Gesamtsystems, da die Bewegung des Strömungsgebiets vollständig in die Integration der Modellgleichungen eingeht. Insgesamt ermöglicht das monolithische Berechnungsmodell eine konservative Kopplung von Struktur und Fluid in Verbindung mit einer effizienten Lösung des Gesamtsystems, die mit wenigen Iterationsschritten auskommt.

5. Aeroelastik von Brückenquerschnitten

5.1 Aufgabenstellung

Bei weitgespannten Seilbrücken können infolge Windeinwirkung Schwingungen mit erheblichen Amplituden auftreten, wobei das Schwingungsverhalten maßgeblichen Einfluß auf Entwurf und Bemessung der Brücken hat. Die Anregung erfolgt durch verschiedene Effekte wie Windturbulenz, Wirbelablösung oder Selbsterregung. Von besonderem Interesse sind selbsterregte, als Brückenflattern bezeichnete Schwingungen, die durch Interaktion von Luftströmung und elastischer Brückenbewegung entstehen, siehe [70]. Die Amplituden können sehr schnell anwachsen, entweder bis das Tragwerk versagt und die Brücke einstürzt oder bis Grenzzyklen auftreten, die in der Regel Materialermüdung zur Folge haben. Die Instabilität des dynamischen Systems tritt auf, wenn während einer vollständigen Periode der gekoppelten Bewegung die Windströmung der Brückenschwingung mehr Energie zuführt, als infolge Strukturdämpfung dissipiert wird. Bekanntestes Beispiel für das Versagen einer Brückenstruktur infolge aeroelastischer Instabilität ist der in Bild 5.1 dargestellte Einsturz der Tacoma Narrows Brücke im Jahre 1940.

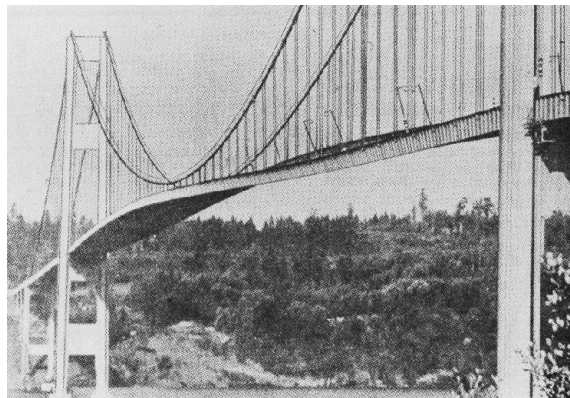


Bild 5.1: Tacoma Narrows Brücke kurz vor dem Einsturz

Für die Untersuchung aeroelastischer Instabilitäten von Brücken kommen verschiedene Verfahren – vom analytischen Ansatz bis zum Vollmodellversuch – in Frage. Schon 1934 hat Theodorsen [79] eine geschlossene analytische Lösung für die angefachte Biege-Torsionsschwingung der ebenen Platte in einer Potentialströmung

vorgestellt. Die mathematische Beschreibung des als Potential- oder Biege-Torsions-Flattern bezeichneten Phänomens hat einen entscheidenden Beitrag zur sicheren Auslegung von Flugzeugtragflügeln geleistet. Analytische Lösungen sind für Brückenprofile jedoch unzureichend, wenn maßgebliche Effekte wie Reibungseinfluß und Wirbelablösung unberücksichtigt bleiben. Vollmodellversuche mit elastischen Tragwerksmodellen im Windkanal liefern die besten Ergebnisse, erfordern aber einen sehr hohen zeitlichen und finanziellen Aufwand. Nachträgliche Modifikationen sind kaum möglich, und der kleine Modellmaßstab führt zu unrealistischen Reynoldszahlen. Weniger aufwendig sind Teilmodellversuche, in denen die aeroelastischen Eigenschaften von Brückenträgerabschnitten im Windkanal untersucht werden. Hierzu ist die vereinfachte Modellierung der Brückendynamik als Feder-Masse-System erforderlich. Wenn Teilmodellversuche zur Bestimmung von instationären Luftkraftbeiwerten dienen, kann die Messung der Strömungskräfte auch an harmonisch bewegten Profilen erfolgen, wobei transiente Phänomene, wie Abhängigkeiten von der Amplitudenentwicklung unberücksichtigt bleiben. Die Analyse der dynamischen Stabilität des gesamten Brückentragwerks erfolgt anschließend an dreidimensionalen Finite-Element-Modellen.

Windkanaluntersuchungen sind aber auch an Teilmodellen sehr aufwendig, so daß numerische Analysen der Brückenaeroelastik zu deutlichen Zeit- und Kostenersparnissen führen können. Darüberhinaus eröffnen Computersimulationen neue Einsichten in die Phänomenologie von Selbsterregungsmechanismen. Und da man die Modellgeometrie im Computer leicht modifizieren kann, ist eine effiziente Durchführung von Entwurfsstudien und Profilloptimierungen möglich. Realitätsnahe numerische Modelle erfordern die Beschreibung der Interaktion von turbulenter Windströmung und nichtlinearer Brückendynamik. Dreidimensionale numerische Simulationen des gekoppelten Gesamtsystems sind mit momentan verfügbaren Rechnerkapazitäten jedoch kaum möglich, so daß analog zum Teilmodellversuch zweidimensionale Berechnungsmodelle zur Untersuchung der aeroelastischen Eigenschaften von Brückenquerschnitten Verwendung finden. Larsen und Walther [45] setzen z. B. eine Diskrete-Wirbel-Methode ein, um instationäre Luftkraftbeiwerte an harmonisch bewegten Querschnitten zu bestimmen. Die volle Berücksichtigung auch transienter Wechselwirkungsphänomene erfordert jedoch zumindest die Betrachtung der Umströmung eines federnd gelagerten starren Querschnitts. Hierzu können die verschiedenen in Abschnitt 4.2 vorgestellten Kopplungsverfahren sowie unterschiedliche Diskretisierungsmethoden eingesetzt werden. Piperno [57] verwendet z. B. ein partitioniertes Lösungsverfahren mit schwacher Kopplung von Struktur und Fluid in Verbindung mit einem Finite-Element-Strömungslöser. Sind wie im Fall der Brückenaeroelastik Stabilitätseigenschaften des gekoppelten Systems von besonderem Interesse, ist eine korrekte Impulsübertragung jedoch wesentlich, da nichtkonservative

Kopplungsalgorithmen zu falschen Stabilitätscharakteristiken führen können. Hier sind Lösungsverfahren mit starker Kopplung zu bevorzugen, wobei sich das in dieser Arbeit vorgestellte monolithische Berechnungsmodell zur effizienten Lösung des numerisch exakt gekoppelten Gesamtsystems besonders anbietet.

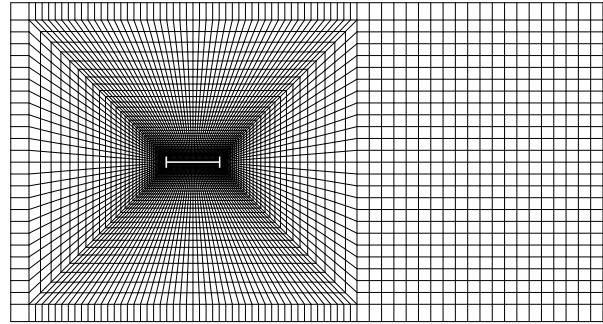
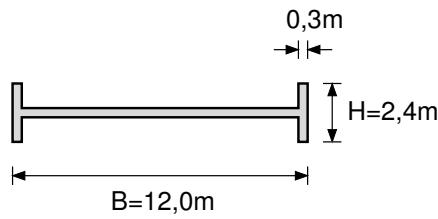
5.2 Wirbelablösung an Brückenquerschnitten

Bei der Umströmung prismatischer Querschnitte entstehen infolge Strömungsablösung zeitlich versetzt an der oberen und unteren Seite des Querschnitts Wirbel, die sich stromabwärts bewegen und im Strömungsnachlauf eine Wirbelstraße bilden. Im laminaren Fall, d. h. bei kleinen Reynolds-Zahlen, stellt sich ein periodisch stationärer Zustand ein, der durch die Ablösefrequenz f_{st} und konstante Amplituden der oszillierenden Strömungskräfte gekennzeichnet ist. Bei scharfkantigen Querschnitten sind Wirbelablösephänomene und somit auch die Strouhal-Zahl nahezu unabhängig von der Reynolds-Zahl, da die Strömungsablösung selbst bei turbulentem Strömungsverhalten an den festgelegten Querschnittskanten stattfindet. Für die Wirbelablösefrequenz scharfkantiger Querschnitte ist also in erster Linie die Querschnittsform verantwortlich. Die sehr hohen Reynolds-Zahlen der natürlichen Windumströmung von Brückenquerschnitten verursachen ein stark turbulentes Strömungsfeld, das stochastisch variierende Amplituden der Strömungskräfte zur Folge hat, die Ablösefrequenz aber kaum beeinflusst. Daher beschränken sich die Untersuchungen in diesem Abschnitt auf laminare Umströmungen von Brückenquerschnitten, deren numerische Behandlung weitaus weniger Schwierigkeiten bereitet.

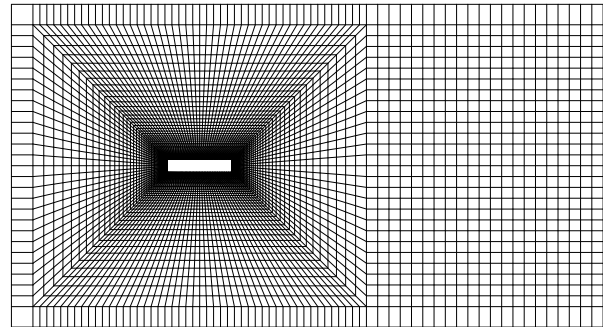
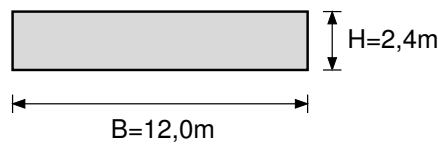
Für drei verschiedene von Larsen [44] mit der Diskreten-Wirbel-Methode untersuchte Querschnitte werden Strömungskräfte und Ablösefrequenzen bei horizontaler Anströmung und fester Lagerung bestimmt. Die Querschnittsformen mit allen Abmessungen sowie die räumlichen Finite-Element-Netze sind in Bild 5.2 zusammengestellt. Der H-Querschnitt ist eine vereinfachte Form des Tacoma Narrows Brückenquerschnitts, der R-Querschnitt ist ein Rechteck mit den gleichen Abmessungen, und im Fall des S-Querschnitts läuft das Rechteck vorne und hinten spitz zusammen.

Die Anströmgeschwindigkeit beträgt $v_{\infty} = 10 \text{ m/s}$, die Fluidichte $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ und die Viskosität $\mu = 0,1 \text{ Ns/m}^2$. Mit der Querschnittsbreite B als Längenmaß folgt eine Reynolds-Zahl von $Re = 1500$. Der Simulation von Larsen liegt dagegen die Reynolds-Zahl $Re = 10^5$ zugrunde, bei der sich eine turbulente Strömung einstellt. Die Diskrete-Wirbel-Methode gilt jedoch nur für laminare Strömungen, da Bewegungen einzelner Wirbel verfolgt und ihre Wechselwirkungen berücksichtigt werden, was im turbulenten Fall kaum möglich ist. Daher sind die Ergebnisse in [44] keine Referenzlösungen, sondern dienen nur als Anhaltspunkt für die Strömungsbeiwerte.

H-Querschnitt



R-Querschnitt



S-Querschnitt

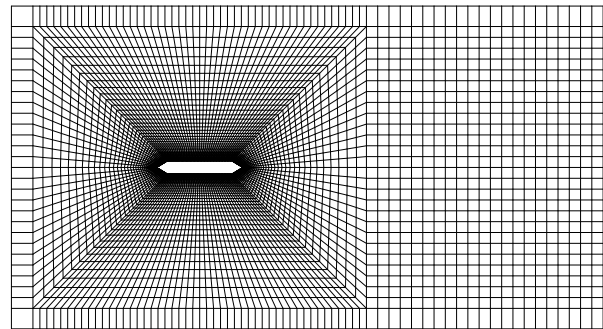
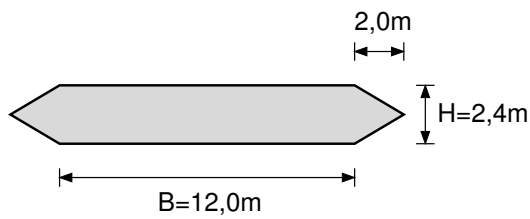


Bild 5.2: Querschnittstypen und räumliche Finite-Element-Netze

Die mit der Querschnittshöhe H definierte Strouhal-Zahl

$$St = \frac{f_{St} H}{v_{\infty}} \quad (5.1)$$

dient als dimensionsloses Maß für die Wirbelablösefrequenz. Und die mit der Querschnittsbreite definierten Beiwerte für Widerstand, Auftrieb und Moment

$$c_D = \frac{2F_D}{\rho v_{\infty}^2 B}, \quad c_L = \frac{2F_L}{\rho v_{\infty}^2 B}, \quad c_M = \frac{2M}{\rho v_{\infty}^2 B^2} \quad (5.2)$$

sind dimensionslose Größen für die auf den Querschnitt in horizontaler und vertikaler Richtung wirkenden resultierenden Strömungskräfte F_D und F_L sowie das auf den Schwerpunkt bezogene resultierende Moment M . Tabelle 5.1 stellt Strouhal-Zahlen, mittlere Widerstandsbeiwerte sowie Maximalwerte der periodisch stationären Verläufe von Auftriebs- und Momentenbeiwerten zusammen. Die Werte in Klammern geben zeitlich gemittelte Ergebnisse von Larsen an.

Die Ergebnisse für die verschiedenen Querschnittsformen liegen hinsichtlich der Strouhal-Zahlen relativ nah beieinander, wogegen die Kraft- und Momentenbeiwerte deutliche Unterschiede aufweisen. Auf den H-Querschnitt wirken im Vergleich zum S-Querschnitt deutlich größere Strömungskräfte, und für den R-Querschnitt liegen die Werte dazwischen, was auch die Zeitverläufe in Bild 5.3 belegen.

Form	St	$c_{D,\text{mean}}$	$c_{L,\text{max}}$	$c_{M,\text{max}}$
H-Querschnitt	0,11 (0,11)	0,30 (0,28)	0,57	0,115
R-Querschnitt	0,11 (0,09)	0,20 (0,23)	0,23	0,035
S-Querschnitt	0,17 (0,13)	0,16 (0,11)	0,04	0,010

Tabelle 5.1: Strouhal-Zahlen und Kraftbeiwerte – Werte von Larsen [44] in Klammern

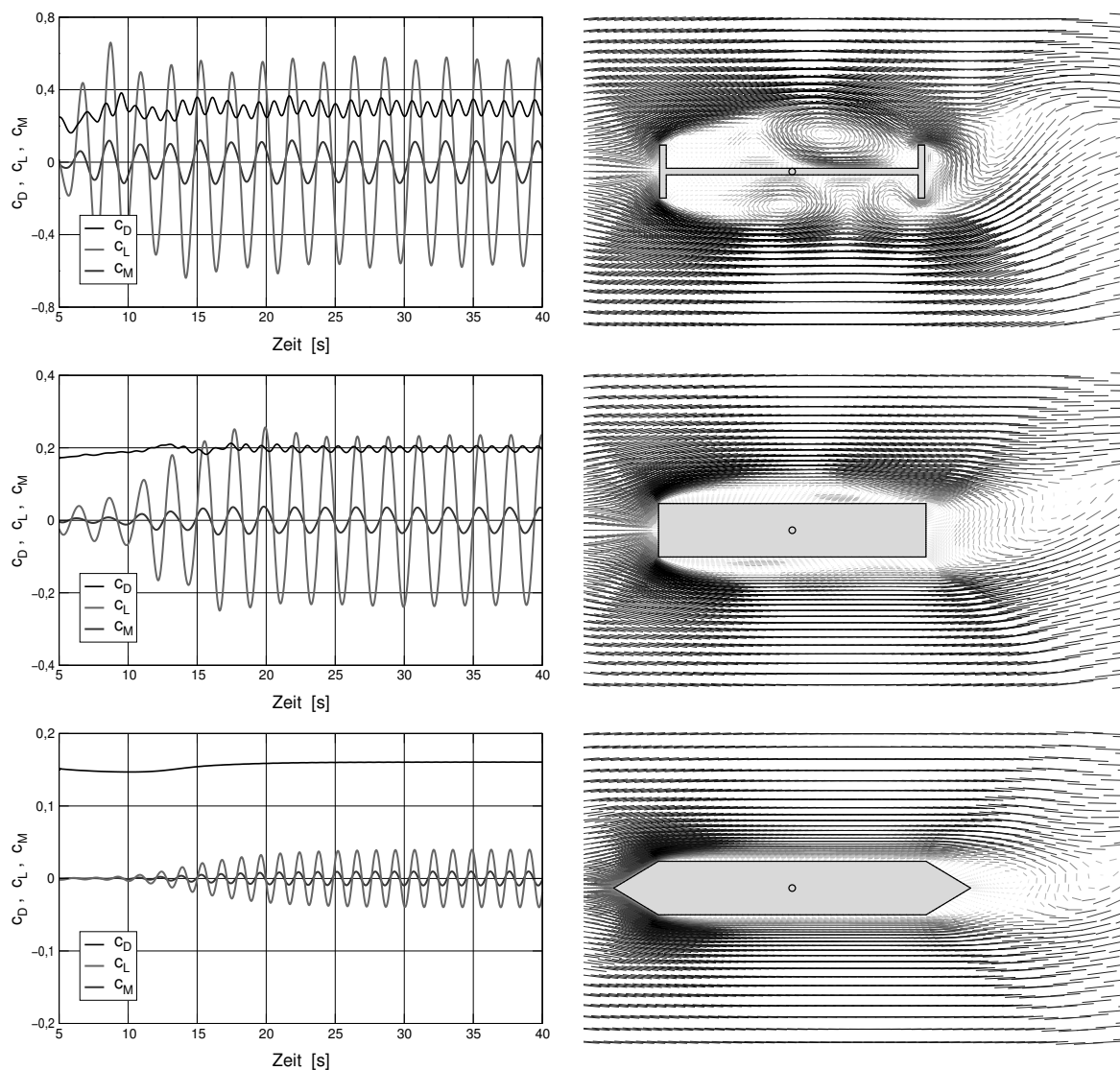


Bild 5.3: Zeitverläufe der Kraftbeiwerte und Geschwindigkeitsfelder

Auf der rechten Seite von Bild 5.3 sind die Geschwindigkeitsfelder der Strömung in der Nähe der drei Querschnitte dargestellt. Im Fall des H-Querschnitts tritt an den Vorderkanten Strömungsablösung auf, die zu wechselseitiger Wirbelbildung führt. Die Wirbel bewegen sich mit der Außenströmung über den Querschnitt und wachsen dabei an, bis die Größe in etwa der Querschnittshöhe entspricht. An den Hinterkanten kommt es zu erneuten Wirbelablösungen, die eine ausgeprägte Wirbelstraße im Nachlauf hervorrufen. Die großen über das Profil wandernden Wirbel verursachen starke Druckschwankungen, die für die hohen Amplituden der Strömungskräfte verantwortlich sind. Bei der Umströmung des R-Querschnitts bilden sich ebenfalls Ablösezone an den Vorderkanten aus, die jedoch relativ schmal sind. Nach der Überströmung von etwa einem Drittel des Profils bilden sich kleine stromabwärts wandernde Wirbel. Deutlich größere Wirbel, die im Strömungsnachlauf eine Wirbelstraße bilden, entstehen infolge erneuter Strömungsablösung erst an den Hinterkanten. Die kleinen über den Querschnitt wandernden Wirbel haben auch weitaus kleinere Strömungskräfte zur Folge. An den Vorderkanten des S-Querschnitts tritt keine Strömungsablösung auf, vielmehr bilden sich an beiden Seiten des Profils Grenzschichten aus. Erst an den Hinterkanten kommt es zu Wirbelablösungen, die gegenüber den anderen Querschnitten eine weitaus höhere Frequenz aufweisen und eine deutlich schmalere Wirbelstraße hervorrufen. Infolge der stromlinienähnlichen Querschnittsform besitzen die Kraftbeiwerte die mit Abstand kleinsten Amplituden, da Wirbel erst hinter dem Querschnitt entstehen.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Larsen zeigt gute Übereinstimmung für das H-Profil, aber relativ große Abweichungen beim S-Profil. Neben der Anwendung verschiedener Modellgleichungen und Diskretisierungsverfahren für die Strömung sind die unterschiedlichen Reynolds-Zahlen der beiden Simulationen eine mögliche Ursache für die im Fall des S-Querschnitts erheblich abweichenden Ergebnisse. Bei der Umströmung von H- und R-Querschnitt wird das Strömungsverhalten in erster Linie durch Wirbelablösungen an den scharfen Kanten festgelegt, womit die Strömung weitgehend unabhängig von der Reynolds-Zahl ist. Die Ausbildung von Grenzschichten und die Größe der Wandschubspannungen am S-Querschnitt wird dagegen von der Viskosität des Fluids bestimmt. Der durch die Reynolds-Zahl charakterisierte Reibungseinfluß ist hier also entscheidend, so daß bei hohen Reynolds-Zahlen Turbulenzeffekte große Bedeutung haben und zusätzliche Ablösungen und Wirbelbildungen hervorrufen können.

Die im folgenden Abschnitt vorgestellte Untersuchung der Aeroelastik federnd gelagerter Profile erfolgt daher beispielhaft für den H-Querschnitt, um Reynolds-Zahl-Abhängigkeiten zu minimieren und identifizierte Anfachungsmechanismen sowie Stabilitätseigenschaften näherungsweise auf reale Windströmungen mit sehr hohen Reynolds-Zahlen übertragen zu können.

5.3 Aeroelastik des H-Querschnitts

Zur Untersuchung der aeroelastischen Eigenschaften von H-Querschnitten wird das im vorhergehenden Abschnitt vorgestellte H-Profil nur noch in horizontaler Richtung festgehalten und hinsichtlich Vertikalbewegung und Verdrehung linear elastisch gelagert. Der betrachtete ein Meter lange Profilabschnitt hat eine Masse von $m = 4000 \text{ kg}$ und ein Massenträgheitsmoment von $\theta = 80000 \text{ kg m}^2$. Die Steifigkeit der Vertikalfeder beträgt $k_h = 2467 \text{ N/m}$ und die der Rotationsfeder $k_\alpha = 126330 \text{ Nm}$, womit die Eigenfrequenzen des Feder-Masse-Systems $f_h = 0,125 \text{ Hz}$ für die Schlagbewegung und $f_\alpha = 0,20 \text{ Hz}$ für die Verdrehung betragen. Die Eigenfrequenzen stimmen in etwa mit den Frequenzen der eingestürzten Tacoma Narrows Brücke überein, wobei Massen und Steifigkeiten hier kleinere Werte annehmen. Zudem wird die innere Dämpfung der Struktur vernachlässigt, so daß aeroelastische Phänomene schon bei sehr geringen Anströmgeschwindigkeiten zu erwarten sind. Die Eigenschaften des Fluids entsprechen mit $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ für die Dichte und $\mu = 0,1 \text{ Ns/m}^2$ für die dynamische Viskosität den Werten aus Abschnitt 5.2.

Die Analysen des gekoppelten Systemverhaltens erfolgen für verschiedene Anströmgeschwindigkeiten, beginnend bei $v_\infty = 5,0$ über $7,5$ bis $10,0 \text{ m/s}$, um aeroelastische Phänomene in Abhängigkeit von der Anströmgeschwindigkeit zu untersuchen. Die aus der Strouhal-Zahl $St = 0,11$ folgenden Ablösefrequenzen für das unbewegliche Profil betragen $f_{St}^{5,0} = 0,24 \text{ Hz}$, $f_{St}^{7,5} = 0,35 \text{ Hz}$ und $f_{St}^{10,0} = 0,46 \text{ Hz}$, und die Reynoldszahl liegt zwischen $Re = 750$ und $Re = 1500$. Die Systemkonfiguration mit Abmessungen und Randbedingungen ist in Bild 5.4 dargestellt. Zwischen Starrkörper und Fluid gelten die Kopplungsbedingungen nach Abschnitt 4.3. Das Strömungsgebiet ist mit 6718 Raum-Zeit-Hexaeder-Elementen diskretisiert, wobei das räumliche Netz der Darstellung in Bild 5.2 entspricht und die Zeitscheibendicke je nach Anströmgeschwindigkeit Werte zwischen $\Delta t = 0,04$ und $0,016 \text{ s}$ annimmt.

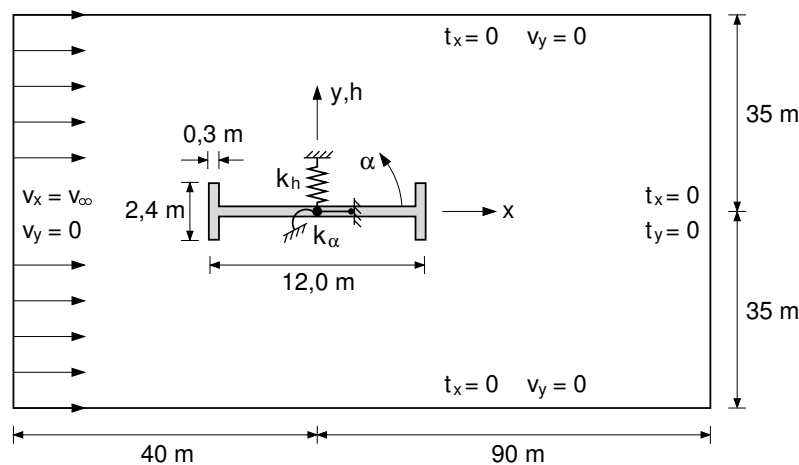


Bild 5.4: Systemkonfiguration zur Untersuchung der Aeroelastik des H-Querschnitts

5.3.1 Einfluß der Anströmgeschwindigkeit

Die Zeitverläufe der auf den Querschnitt wirkenden resultierenden Strömungskräfte und Momente sind in Bild 5.5 den zugehörigen Federkräften und Momenten gegenübergestellt. Da die Federkraftgrößen ein Maß für Verschiebung und Verdrehung des Querschnitts sind, beschreiben sie das Antwortverhalten des dynamischen Systems, wohingegen die Kraftgrößen infolge Strömungsdruck die Einwirkung repräsentieren.

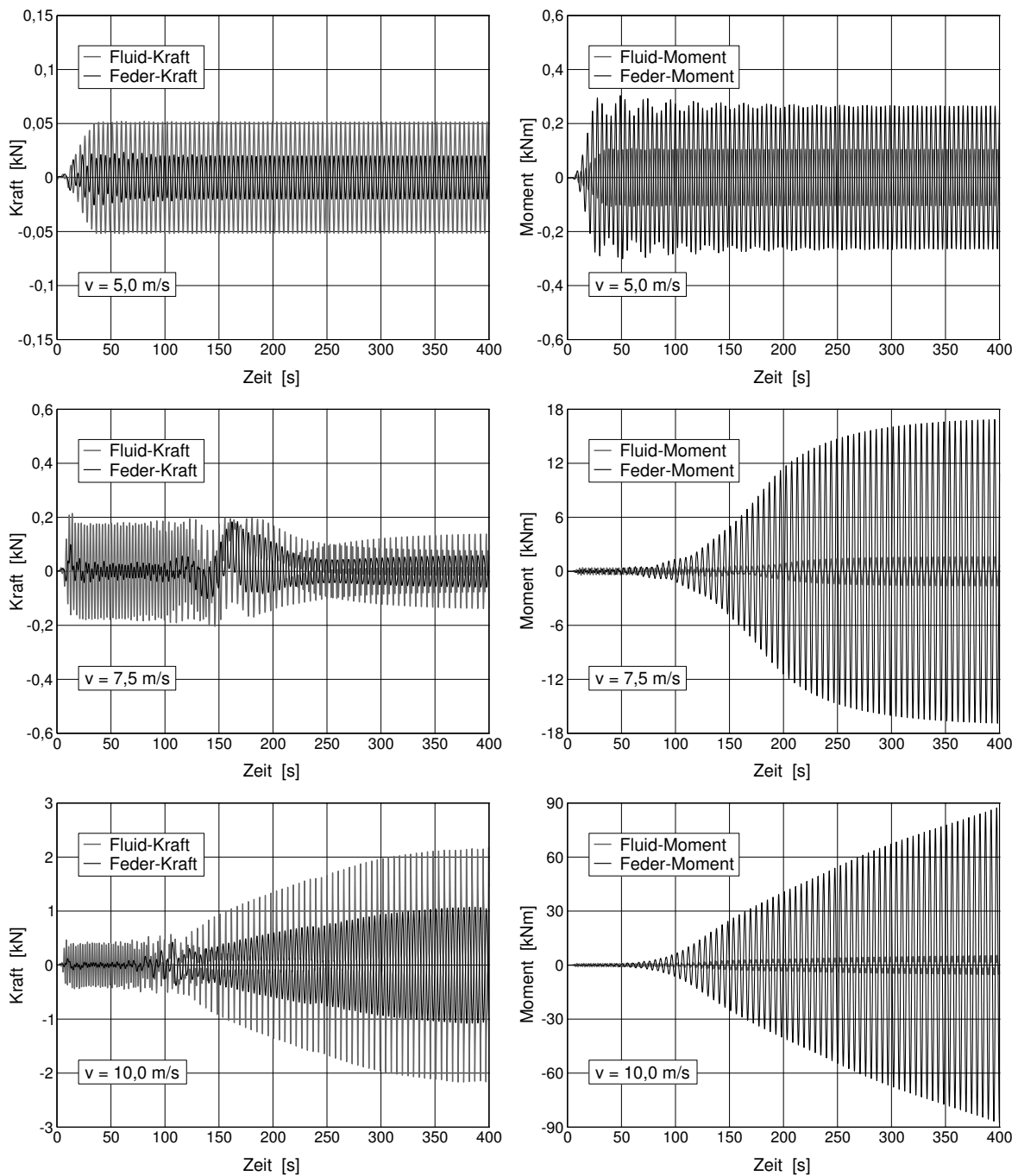


Bild 5.5: Zeitverläufe der Kräfte und Momente für verschiedene Anströmgeschwindigkeiten

Die Anwendung der schnellen Fourier-Transformation auf die in Bild 5.5 gezeigten Zeitverläufe im Zeitintervall $200\text{s} < t < 400\text{s}$ führt zu den in Bild 5.6 dargestellten Amplitudenspektren der Kräfte und Momente. Für die beiden Anströmgeschwindigkeiten $v_\infty = 7,5\text{ m/s}$ und $v_\infty = 10,0\text{ m/s}$, die zu instabilem Systemverhalten führen, sind in Bild 5.7 zusätzlich die Phasenebenen von Vertikal- und Drehbewegung sowie die vertikale Auslenkung h über der Verdrehung α dargestellt. Die angegebenen Zahlenwerte beziehen sich auf die Einheiten m , m/s , rad , rad/s .

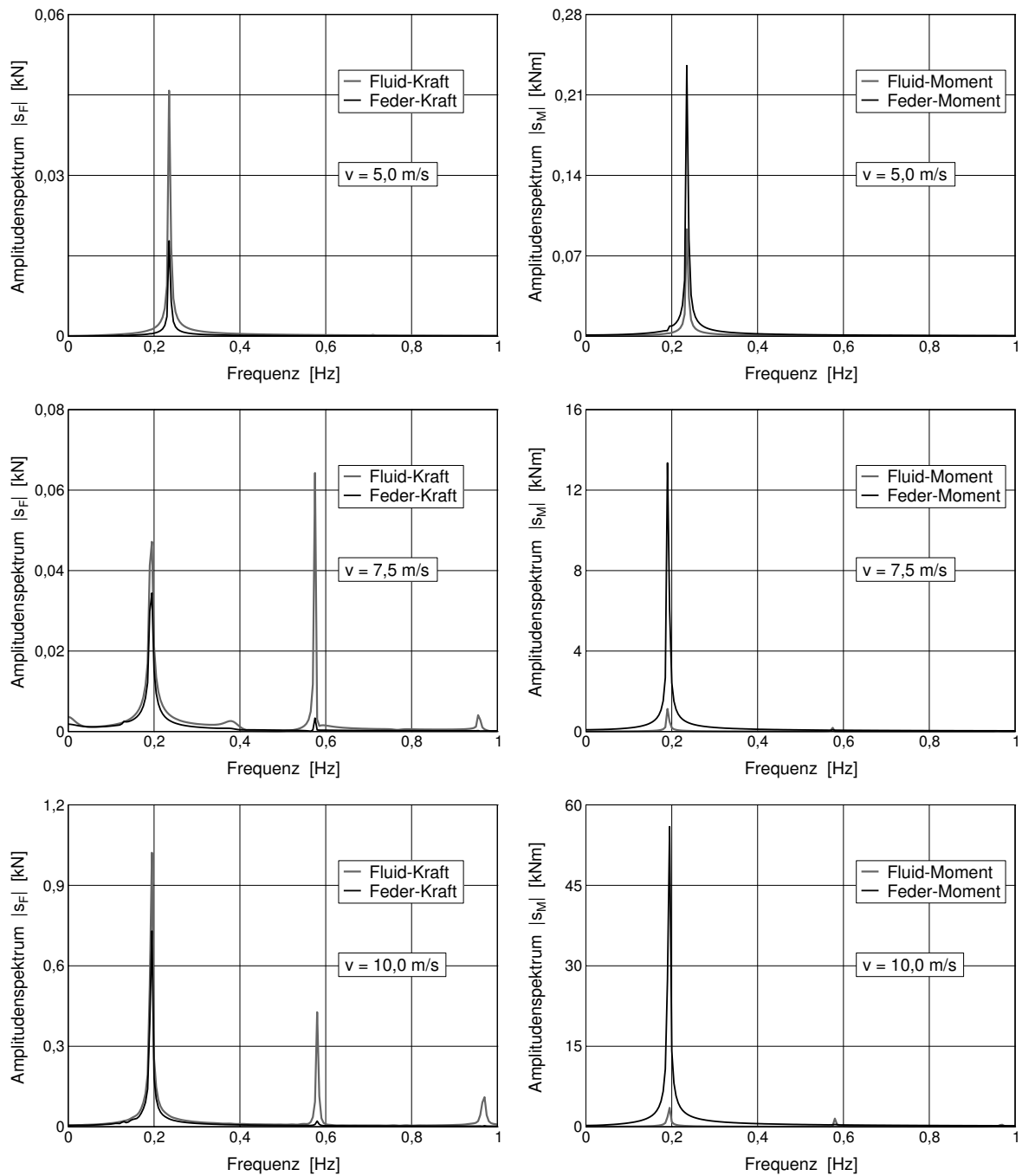


Bild 5.6: Amplitudenspektren der Kräfte und Momente für $200\text{s} < t < 400\text{s}$

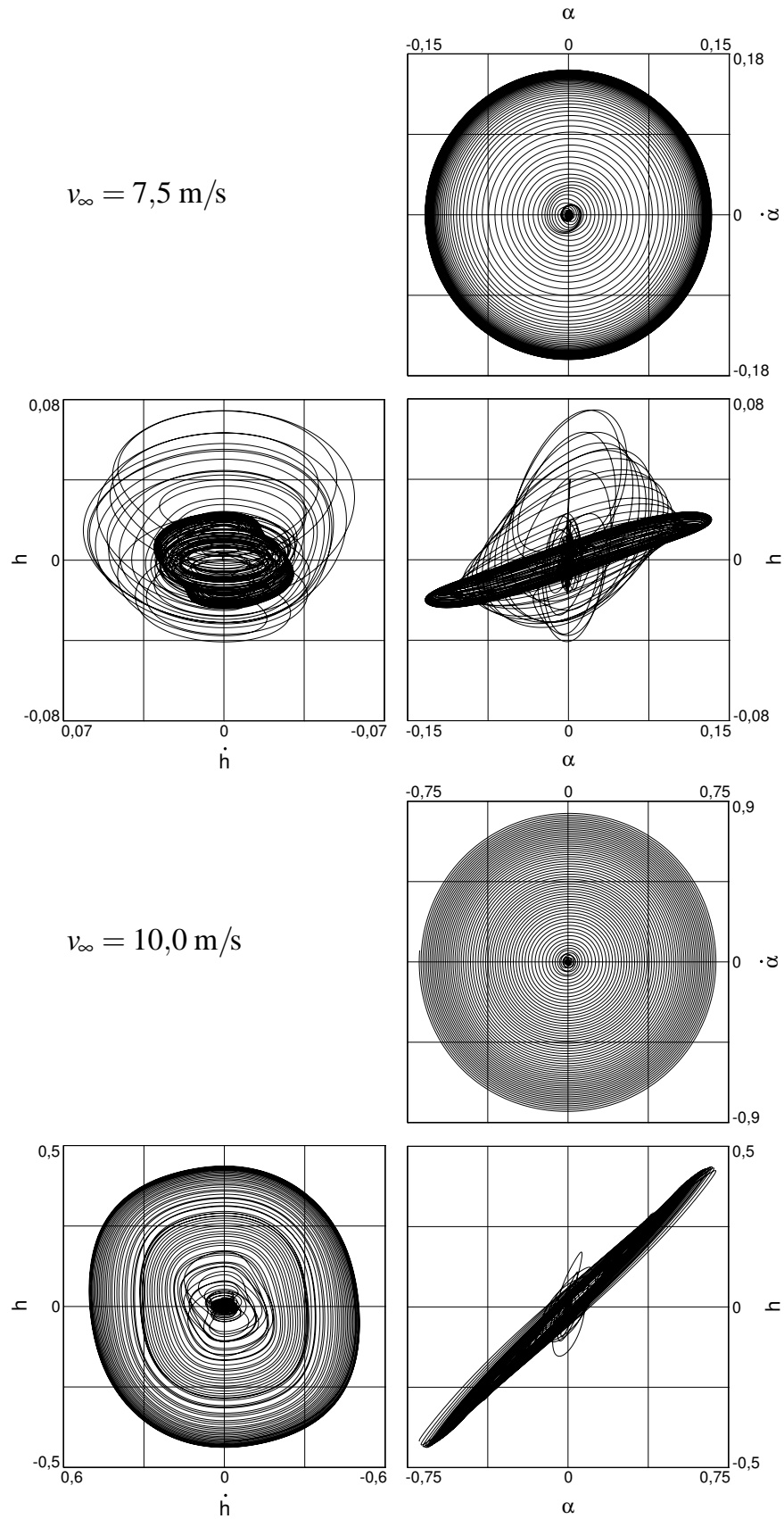


Bild 5.7: Phasenebenen für Translation und Rotation bei $v_{\infty} = 7,5$ und $10,0 \text{ m/s}$

Bei der kleinsten Anströmgeschwindigkeit $v_\infty = 5,0 \text{ m/s}$ rufen periodische Wirbelablösungen erzwungene Vertikal- und Torsionsschwingungen des Querschnitts mit der Ablösefrequenz $f_{St} = 0,24 \text{ Hz}$ hervor. Vertikal- und Torsionsbewegung verlaufen phasengleich und weisen gegenüber den Strömungskräften eine Phasenverschiebung von $\varphi = 180^\circ$ auf, da die Erregerfrequenz oberhalb beider Eigenfrequenzen liegt und keine Strukturdämpfung wirksam ist. Verschiebungs- und Verdrehungsamplituden sind mit $h = 0,8 \text{ cm}$ und $\alpha = 0,12^\circ$ kaum sichtbar, so daß keine starke Beeinflussung des Strömungsfeldes auftritt. Auf die Anregung bezogen weist die Rotation allerdings deutlich größere Amplituden auf als die Schlagbewegung, da die zugehörige Torsionseigenfrequenz viel näher an der Ablösefrequenz liegt. Infolge von Anfangsstörungen machen sich zu Beginn der Simulation auch die Struktur-Eigenfrequenzen als Schwebungen in den Zeitverläufen von Federkraft und -moment bemerkbar. Wenn der Einfluß der homogenen Lösung infolge Dämpfungswirkung des Fluids jedoch abgeklungen ist, stellt sich ein periodisch stationärer Zustand ein, der nur von der Ablösefrequenz beherrscht wird, siehe Amplitudenspektren für $t > 200 \text{ s}$ in Bild 5.6.

Im Fall der Anströmgeschwindigkeiten $v_\infty = 7,5$ und $10,0 \text{ m/s}$ ist das anfängliche Systemverhalten ebenfalls von Wirbelablösungen und kleinen Profilbewegungen geprägt, wobei die Ablösefrequenzen des festgehaltenen Querschnitts dominieren. Die Bewegungen sind jedoch sehr unregelmäßig, so daß sich kein periodischer Zustand einstellt. Statt dessen wächst die Amplitude der Drehbewegung nach einer gewissen Anzahl von Wirbelablöseperioden exponentiell an, und das gekoppelte Systemverhalten wird instabil. Die charakteristische Frequenz verschiebt sich dabei von der Ablösefrequenz, die je nach Anströmgeschwindigkeit unterschiedlich ist, zu einer nur von den Struktureigenschaften bestimmten Frequenz des dynamisch instabilen Gesamtsystems. Mit $f_c = 0,19 \text{ Hz}$ liegt die Frequenz, die für Dreh- und Schlagbewegung sowie Wirbelablösung gültig ist, etwas unterhalb der Torsions- aber weit über der Schlageigenfrequenz. Die Drehbewegung dominiert die Systemantwort deutlich. Dabei ist der Drehpunkt vom Profilschwerpunkt leicht in stromaufwärts zeigende Richtung verschoben, so daß eine phasengleiche Schlagbewegung auftritt. Auch die Strömungskräfte schwanken mit der Frequenz f_c . Die Zeitverläufe weichen aber erheblich von der Sinusform ab. Folglich weisen die Amplitudenspektren in Bild 5.6 zusätzliche Spitzen bei den drei- und fünffachen Werten der Grundfrequenz auf.

Bei der nahe der kritischen Geschwindigkeit liegenden Anströmgeschwindigkeit von $v_\infty = 7,5 \text{ m/s}$ ist der Amplitudenanstieg der Drehbewegung begrenzt, so daß sich bei moderaten Verdrehungen von $\alpha_{\max}^{7,5} = 7,7^\circ$ und kleinen vertikalen Verschiebungen von $h_{\max}^{7,5} = 2,4 \text{ cm}$ ein Grenzzyklus ausbildet, siehe Bild 5.5 und 5.7. Bei höheren Anströmgeschwindigkeiten steigen die Amplituden im Verlauf der Simulation dagegen unbegrenzt an, so daß für $v_\infty = 10,0 \text{ m/s}$ Verdrehungen und Verschiebungen bis zum Ende der Berechnung bei $t = 400 \text{ s}$ auf Werte von $\alpha = 40^\circ$ und $h = 43 \text{ cm}$ anwachsen.

5.3.2 Phänomenologie der Selbsterregung

Die Untersuchung der einsetzenden Instabilität und der Anregungsmechanismen der gekoppelten Bewegung erfolgt für die Anströmgeschwindigkeit $v_\infty = 10,0 \text{ m/s}$. Zunächst wird die Übergangsphase betrachtet, in der sich das Systemverhalten grundlegend ändert. Die ab $t = 20 \text{ s}$ anwachsende Torsionsschwingung weist einen sehr unregelmäßigen Zeitverlauf auf, bis der Einfluß der ursprünglichen Wirbelablösefrequenz bei $t = 80 \text{ s}$ verschwindet und eine angefachte reine Sinusschwingung auftritt. Die Querschnittsbewegungen beeinflussen das Strömungsfeld derart, daß zeitversetzt im Zeitbereich $60 \text{ s} < t < 120 \text{ s}$ auch die Strömungskräfte und -momente sowie die Schlagbewegung unregelmäßig verlaufen und die Frequenz ändern. Bild 5.8 zeigt die Momentenverläufe und den aeroelastischen Momentenbeiwert in der Übergangsphase. Wegen der irregulären Verläufe der aeroelastischen Beiwerte in der Übergangsperiode ist es schwierig, Gründe für das Einsetzen der Instabilität zu identifizieren. Wenn der Wechsel der Systemeigenschaften ab $t = 120 \text{ s}$ aber abgeschlossen ist und die Verläufe trotz zunehmender Amplituden in jeder Periode die gleiche Form aufweisen, ist die Untersuchung von Anregungsmechanismen möglich.

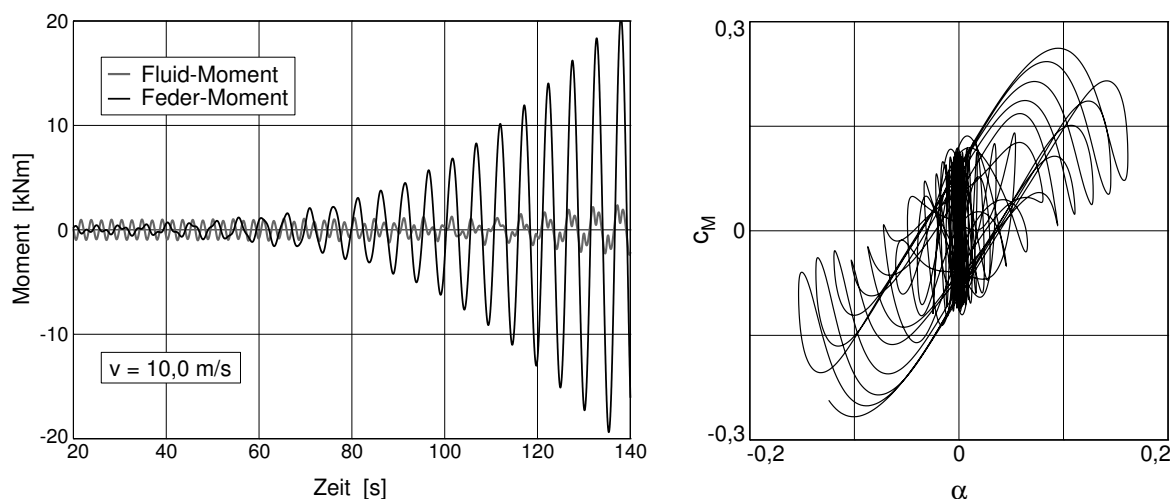


Bild 5.8: Instabiles Systemverhalten für $v_\infty = 10,0 \text{ m/s}$ im Zeitbereich $20 \text{ s} < t < 140 \text{ s}$

Bild 5.9 zeigt die Druck- und Geschwindigkeitsfelder der Strömung in Querschnittsnähe für eine halbe Periode der voll ausgebildeten gekoppelten Bewegung. Ein an der oberen Vorderkante des Querschnitts abgelöster Wirbel wandert über den Steg und verursacht dabei ein auf den Querschnitt wirkendes veränderliches Moment, da sich der horizontale Abstand zwischen Wirbel und Querschnittsschwerpunkt verändert. Wenn das Profil die horizontale Lage erreicht, befindet sich der Wirbel deutlich hinter dem Schwerpunkt und induziert ein in Richtung der Drehbewegung wirkendes Moment. Die Phasenverschiebung zwischen wirbelinduzierter Momenteneinwirkung

und Querschnittsverdrehung führt zu einem Energietransfer von der Strömung in das Feder-Masse-System des Querschnitts. Folglich wächst die Amplitude der Torsionsschwingung unbeschränkt an. Der Energieeintrag in das Feder-Masse-System ist auch im linken Diagramm von Bild 5.10 des nächsten Abschnitts, das den Momentenbeiwert für eine vollständige Periode über der Verdrehung darstellt, als die von der Kurve umschriebene Fläche deutlich erkennbar.

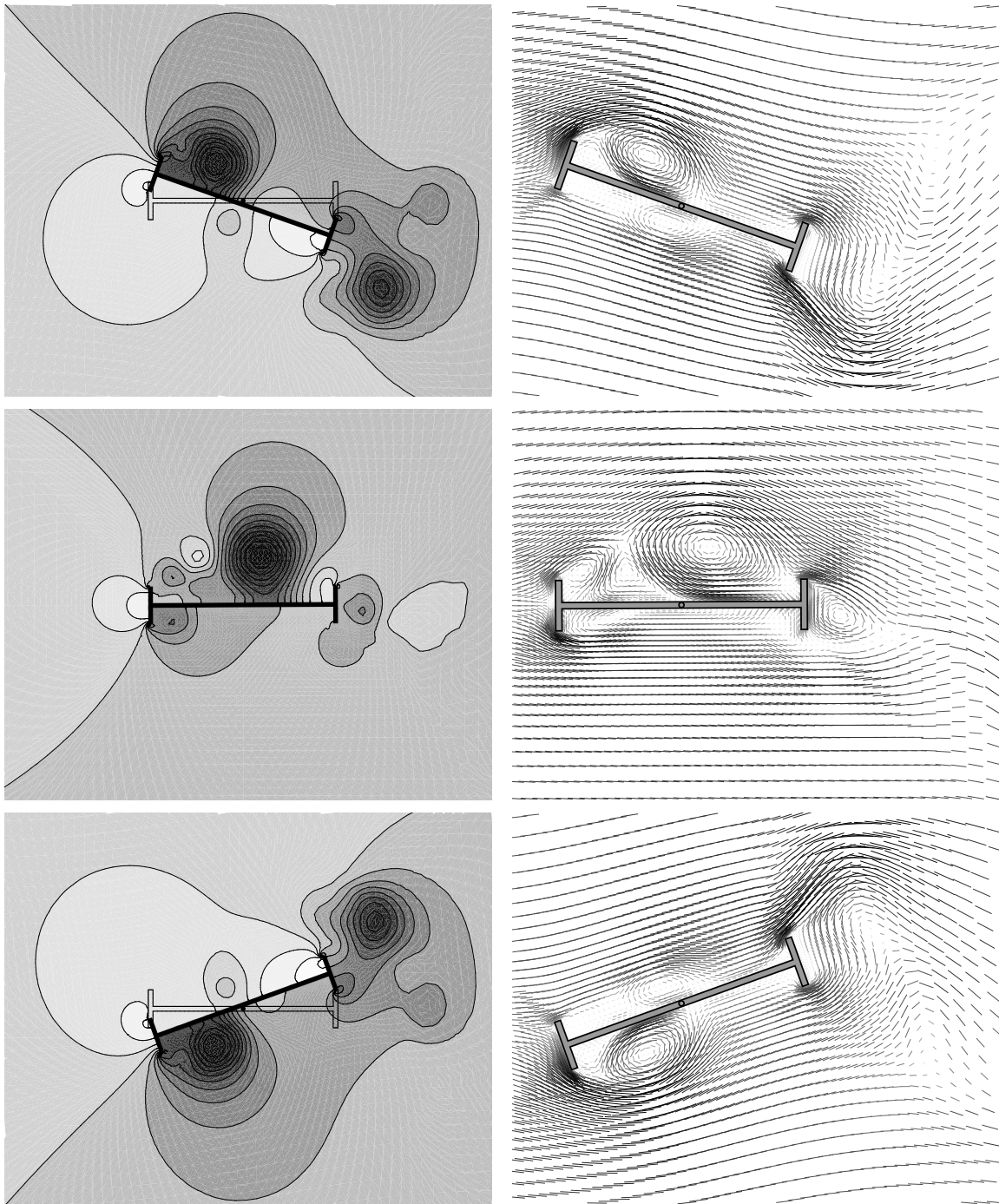


Bild 5.9: Druck- und Geschwindigkeitsfelder bei $t = 208,6\text{ s}$, $t = 209,9\text{ s}$ und $t = 211,2\text{ s}$

5.3.3 Aeroelastische Beiwerte für Flutteranalysen von Brücken

Da die Torsionsbewegung das gekoppelte Systemverhalten beherrscht, erfolgt die Auswertung der auf den Querschnitt wirkenden Strömungskräfte hier beispielhaft für den Momentenbeiwert. Die im linken Diagramm von Bild 5.10 dargestellte Hysteresekurve des Momentenbeiwerts verläuft im mittleren Bereich im Uhrzeigersinn, womit ein Energietransfer von der Strömung in das Feder-Masse-System stattfindet. Die beiden äußeren Bereiche mit entgegengesetzter Drehrichtung, die auch zusammengekommen noch viel kleiner sind, repräsentieren dagegen eine strömungsinduzierte Dämpfung des strukturdynamischen Systems. Insgesamt überwiegt die Anfachung deutlich gegenüber der Dämpfung.

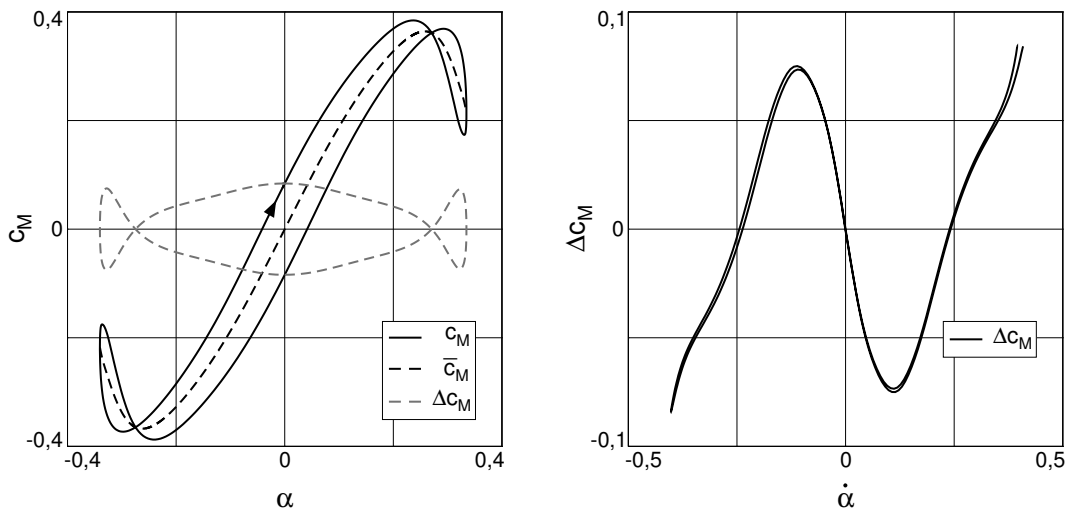


Bild 5.10: Aeroelastische Momentenbeiwerte in der Periode $204,7\text{ s} < t < 209,9\text{ s}$

Teilt man die Hysteresekurve des Momentenbeiwerts in einen mittleren nur vom Verdrehwinkel α abhängigen Wert \bar{c}_M und einen deviatorischen Anteil Δc_M auf, siehe Bild 5.10, so kann jedem Winkel eindeutig ein mittlerer Momentenbeiwert zugeordnet werden. Für Anfachung und Dämpfung ist jedoch allein der deviatorische Anteil verantwortlich. Wird dieser, wie im rechten Diagramm von Bild 5.10 dargestellt, über der Winkelgeschwindigkeit aufgetragen, so folgt näherungsweise auch hier zu jeder Winkelgeschwindigkeit ein eindeutig zugeordneter deviatorischer Momentenbeiwert. Wenn in Flutteranalysen von Brücken die Windwirkung mit nichtlinearen aeroelastischen Kraft- und Momentenbeiwerten berücksichtigt wird, gilt für die Brückendynamik die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{p}(t) + \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\mathbf{x} + \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}, \quad (5.3)$$

deren nichtlineare windinduzierte Steifigkeiten \mathbf{A}_0 und Dämpfungsterme \mathbf{A}_1 aus den in Bild 5.10 dargestellten Charakteristiken der aeroelastischen Beiwerte folgen. Die

je nach Lösungsverfahren erforderlichen Sekanten- oder Tangentensteigungen der mittleren Verläufe \bar{c}_X der Beiwerte legen die windinduzierten Steifigkeiten fest, und die Steigungen der über den Geschwindigkeiten aufgetragenen deviatorischen Anteile Δc_X bestimmen die Anfachungs- bzw. Dämpfungseigenschaften. Die Bezeichnung c_X wird hier als gemeinsames Symbol für alle Kraft- und Momentenbeiwerte verwendet.

Erlauben die Verläufe der deviatorischen Beiwerte es nicht, jeder Geschwindigkeit eindeutig einen Beiwert zuzuordnen, so ist auch hier eine Aufteilung in mittlere Werte und Abweichungen möglich, wobei die Abweichungen der deviatorischen Beiwerte dann zusätzlich als bewegungsabhängige Trägheitsanteile $\mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}}$ in die Bewegungsgleichung eingehen. Bei dem hier beschriebenen Vorgehen berücksichtigt der windinduzierte Trägheitsterm jedoch nicht die aeroelastisch wirksame Luftmasse. Diese ist bei einer harmonischen Bewegung mit bis auf einen Faktor identischen Zeitverläufen von Verschiebung und Beschleunigung schon in den windinduzierten Steifigkeiten \mathbf{A}_0 enthalten. Der zusätzliche Trägheitsterm dagegen tritt immer dann auf, wenn die Geschwindigkeitsamplitude während einer Periode zu- oder abnimmt, und beschreibt somit den transienten Anteil der Windwirkung.

Die in Bild 5.10 dargestellten Kurven gelten nur für eine ausgewählte Periode und damit eine bestimmte Amplitude, so daß eine vollständige Modellierung der Windwirkung mit Luftkraftbeiwerten die Auswertung einer Vielzahl von Perioden erfordert, um die Amplitudenabhängigkeit der Beiwerte zu erfassen.

6. Angeströmtes Membran-Hängedach

6.1 Aufgabenstellung

Leichte Membrankonstruktionen spielen in der modernen Architektur eine wichtige Rolle für temporäre Bauten sowie bei der Überdachung von großen Hallen oder Tribünen. Insbesondere im Fall von Membran-Hängedächern, die nur durch das Eigengewicht vorgespannt sind, können Windwirkungen Membranschwingungen mit erheblichen Amplituden hervorrufen. Hierbei gilt den Flatterschwingungen, die durch Interaktion von gleichmäßiger Windanströmung und Membranbewegung verursacht werden, besondere Aufmerksamkeit, wenn bei langanhaltenden Bewegungen mit großen Verformungen Materialermüdung eintritt oder ein Durchschlagen der Membran nicht eintreten darf. Bei glaseingedeckten Seilnetzen z. B. kann ein Durchschlagen des Tragwerks zur Zerstörung der Glaseindeckung führen.

In diesem Kapitel sollen anhand eines zweidimensionalen Modellproblems Möglichkeiten der numerischen Simulation von Membrandach-Wind-Wechselwirkungen aufgezeigt werden. Dazu wird ein 5 Meter hohes Gebäude mit einachsiger tragendem Membran-Hängedach betrachtet, dessen Spannweite 10 Meter beträgt. Als Tragwerksmodell findet die in Abschnitt 2.4.4 vorgestellte, einachsige gespannte Membran Verwendung. Die Untersuchungen dienen in erster Linie der Erprobung der konservativen Kopplungsformulierung und des simultanen Lösungsverfahrens. Turbulenzeffekte, die bei den hohen Reynolds-Zahlen natürlicher Windumströmungen von Gebäuden auftreten, bleiben unberücksichtigt, da die hier angenommene Viskosität des Fluids auf relativ kleine Reynolds-Zahlen führt.

Zunächst erfolgt die Simulation der Gebäudeumströmung für den Fall des festgehaltenen Membrandachs, so daß keine Wechselwirkungseffekte auftreten können. Ein Vergleich mit dem anschließend betrachteten gekoppelten System ermöglicht die Beurteilung der aus der Wechselwirkung resultierenden aeroelastischen Phänomene. Für das gekoppelte System liegen ähnliche Untersuchungen von Shimura und Sekine [69] vor, wobei ein vereinfachtes Feder-Masse-Modell für die Membran, eine relativ grobe Strömungsdiskretisierung und eine schwache Kopplungsformulierung sowie abweichende Abmessungen und Materialeigenschaften zugrunde liegen, so daß ein direkter Vergleich der Ergebnisse nicht möglich ist.

6.2 Gebäudeumströmung bei festgehaltenem Membrandach

Das Beispiel behandelt die Umströmung eines auf glattem Grund stehenden Gebäudes. Das Dach des Gebäudes hat die Form der in Abschnitt 2.4.4 betrachteten Membran unter Wirkung des 0,32-fachen Eigengewichts. Dabei soll die Reduktion des Eigengewichts in etwa die mittlere Sogwirkung des Strömungsdruckes berücksichtigen. Die Dichte des Fluids beträgt $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$ und die dynamische Viskosität $\mu = 0,1 \text{ Ns/m}^2$. Für das Geschwindigkeitsprofil am Einströmrand gilt das Exponentialgesetz $v_x(y) = 35 \text{ m/s} \cdot (y/350 \text{ m})^{0,22}$, womit die Strömungsgeschwindigkeit in Dachhöhe den Wert $v_x(5 \text{ m}) = 13,75 \text{ m/s}$ annimmt. Mit der Spannweite $l = 10 \text{ m}$ als Längenmaß folgt eine Reynolds-Zahl von $Re \approx 1700$. Bild 6.1 zeigt die Systemkonfiguration mit allen Abmessungen und Randbedingungen. Der an die Membran grenzende Rand des Strömungsgebiets ist zunächst jedoch unbeweglich und fordert das Verschwinden der Strömungsgeschwindigkeiten. Um die von auslaufenden Wirbeln verursachten Störungen des Druckfeldes, die bei der gekoppelten Analyse auch auf die Membran wirken, zu minimieren, besitzt das betrachtete Strömungsgebiet relativ große Abmessungen hinter und über dem Gebäude.

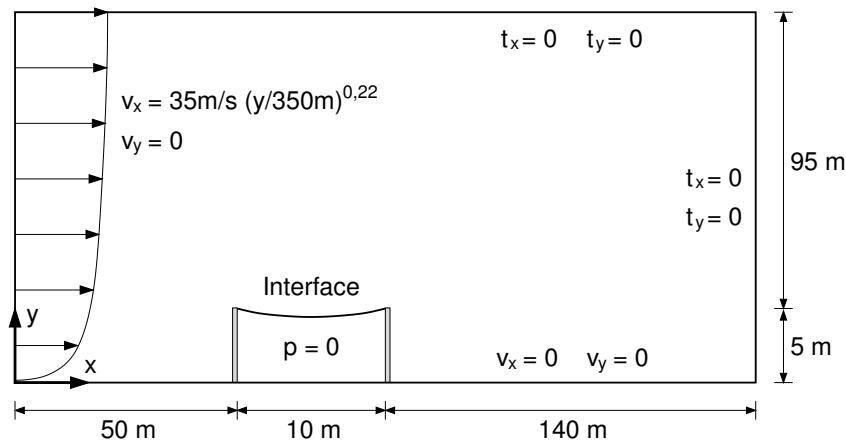


Bild 6.1: Systemkonfiguration für die Simulation der Membrandach-Anströmung

Bild 6.2 zeigt das räumliche Finite-Element-Netz. Das Fluidgebiet ist mit 10 939 und die Membran mit 100 Raum-Zeit-Hexaeder-Elementen diskretisiert. Die Anwendung des in Abschnitt 4.4.2 beschriebenen Netzbewegungsalgorithmus unter Vorgabe der Membranverformung bei 0,32-fachem Eigengewicht legt vorab die Netzgeometrie des Strömungsgebiets fest. Bild 6.3 zeigt einen Ausschnitt des Netzes in der Nähe der Vorderkante des Daches. Die fette schwarze Linie repräsentiert den Dirichlet-Rand des Strömungsgebiets, an dem die Geschwindigkeiten verschwinden, und die fette graue Linie die Interface-Elemente, die im Fall der festgehaltenen Membran ebenfalls Strömungsgeschwindigkeiten von null vorschreiben. Die schmalen Elemente unterhalb der grauen Linie bilden das auf Grundlage der geometrisch nichtlinearen

Elastizitätstheorie formulierte Finite-Element-Modell der Membran. Für die relativ kleine Zeitscheibendicke von $\Delta t = 0,005$ s sind in erster Linie nicht die Genauigkeitsanforderungen verantwortlich. Vielmehr folgt eine effiziente Lösung der nichtlinearen Gleichungen und linearisierten Gleichungssysteme mit einer sehr geringen Anzahl von Iterationsschritten. So sind bei der Picard-Iteration nach Gleichung (3.31) auch im Fall der simultanen Lösung des gekoppelten Gesamtsystems nur drei bis vier Iterationsschritte nötig, bis das Ergebnis im Zeitschritt konvergiert.

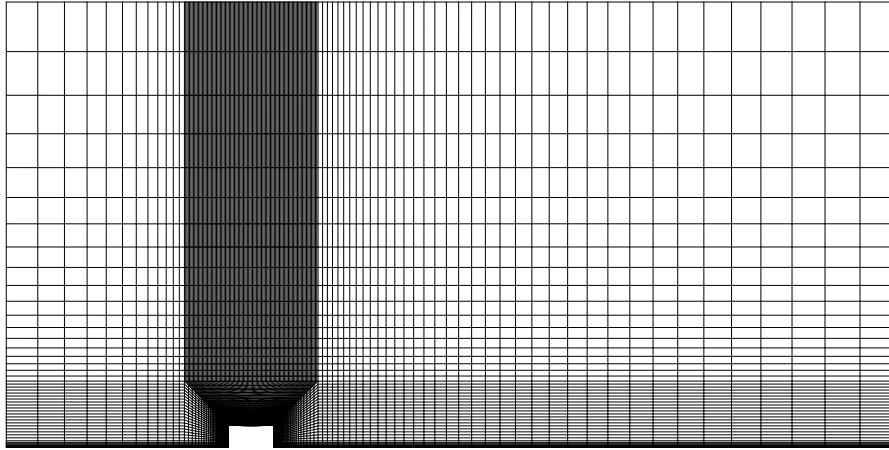


Bild 6.2: Räumliches Finite-Element-Netz mit eingprägter Membranverformung

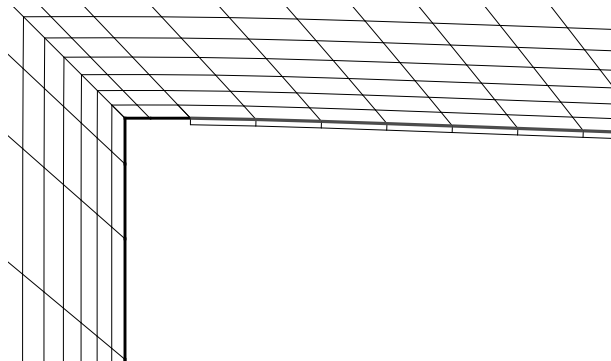


Bild 6.3: Detail des Netzes an der Vorderkante des Daches

Zu Beginn der Simulation gilt das Anströmgeschwindigkeitsprofil im gesamten Strömungsgebiet, womit die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes verletzt wird. Aber nach wenigen Zeitschritten, die von unphysikalischen Druckstörungen geprägt sind, folgt ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld. Die Bilder 6.4 und 6.5 zeigen die Zeitverläufe des Strömungsdruckes in Dachmitte sowie der vertikalen Geschwindigkeit hinter dem Gebäude im Punkt $x = 67,5$ m und $y = 5,3$ m. Ab $t = 50$ s stellt sich ein periodisch stationärer Strömungszustand ein. An der Gebäudevorderkante entsteht eine Totwasserzone, die sich über das gesamte Hängedach erstreckt, womit

die Sogwirkung des Strömungsdrucks relativ gleichmäßig über der Membran verteilt ist und nur leichte Sogspitzen an den Gebäudekanten auftreten. Auch der zeitliche Verlauf des auf die Membran wirkenden Drucks weist nur geringe Schwankungen auf, siehe Bild 6.4, da keine Wirbel über das Dach wandern.

Erst an der Hinterkante lösen sich Wirbel mit einer Frequenz von $f=0,21\text{ Hz}$ ab. Die relativ niedrige Ablösefrequenz folgt aus der Tatsache, daß die Wirbel zunächst hinter dem Gebäude verweilen und dabei deutlich anwachsen, bis der Durchmesser etwa die eineinhalbfache Gebäudehöhe erreicht hat und die Außenströmung die Wirbel stromabwärts transportiert. Die Druck- und Geschwindigkeitsfelder der Strömung sind in Bild 6.6 zu drei Zeitpunkten innerhalb einer Periode dargestellt.

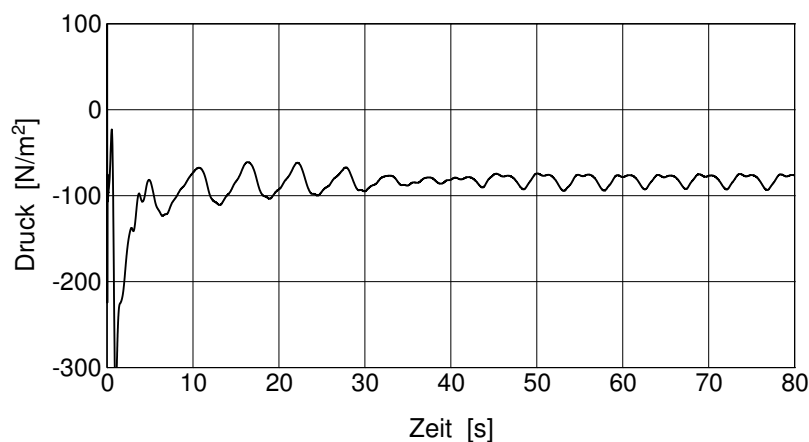


Bild 6.4: Zeitverlauf des Strömungsdrucks in Dachmitte

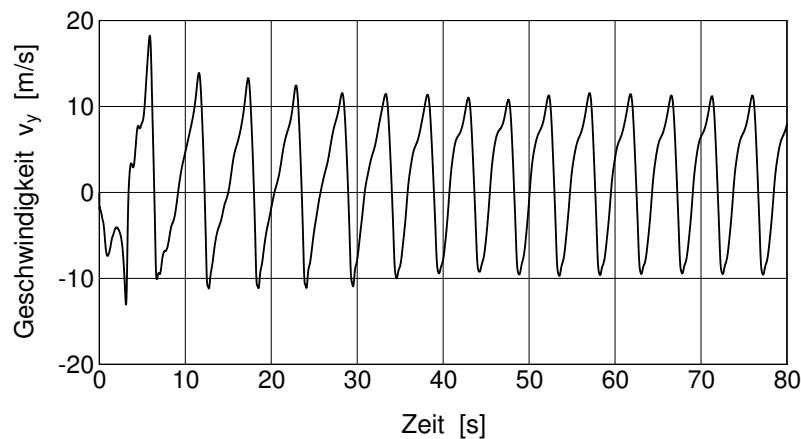


Bild 6.5: Zeitverlauf der vertikalen Geschwindigkeit hinter dem Gebäude

Das beobachtete Strömungsverhalten kann jedoch nicht ohne weiteres auf reale Windströmungen hoher Reynolds-Zahlen übertragen werden, wenn die viel kleinere, wirkliche Viskosität des Windes eine deutlich schmalere Totwasserzone zur Folge hat und Turbulenzeffekte auch über dem Gebäude Wirbel hervorrufen.

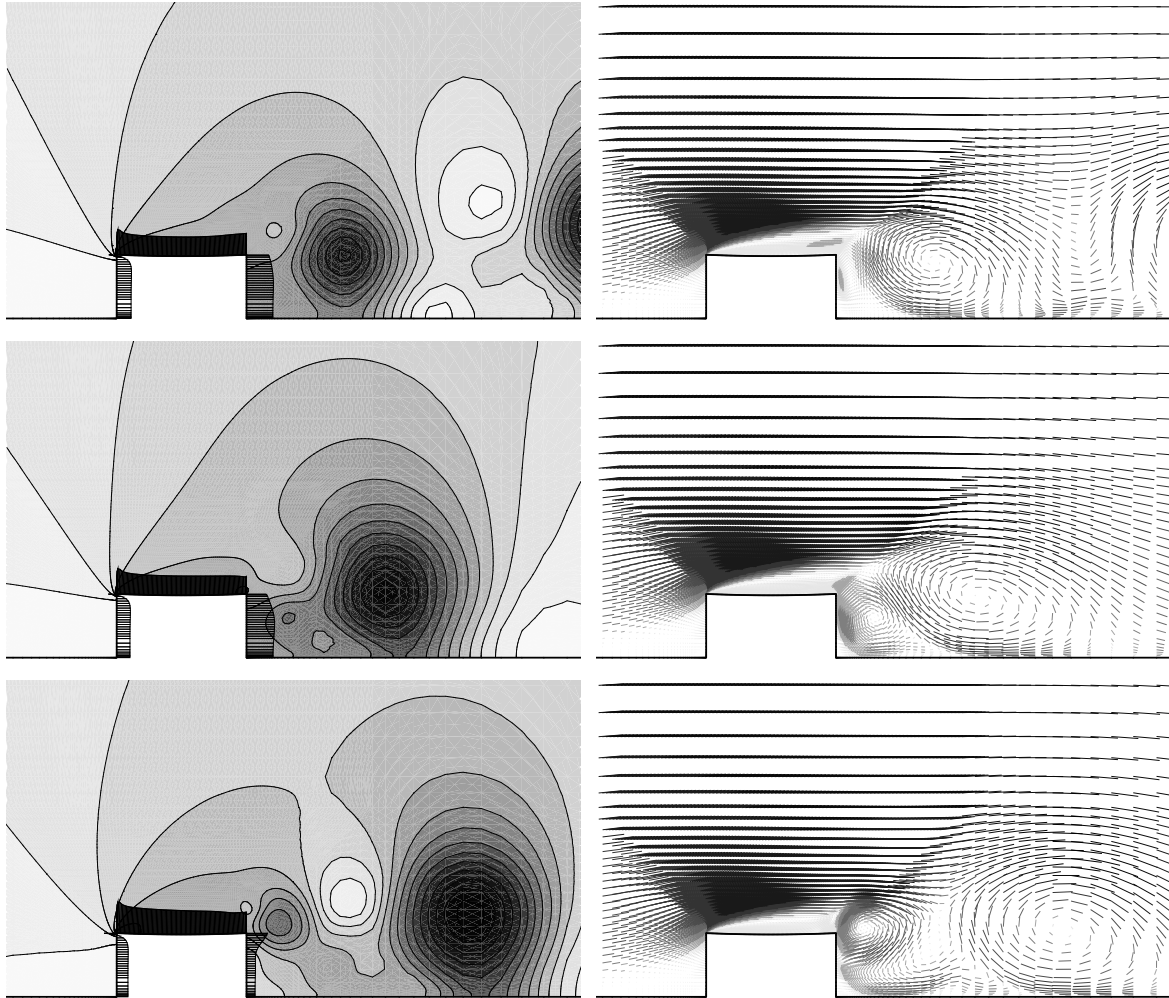


Bild 6.6: Druck- und Geschwindigkeitsfelder ohne Kopplung bei $t = 54,8$; $56,3$ und $57,8$ s

6.3 Interaktion von Membranbewegung und Gebäudeumströmung

Bevor die gekoppelte Simulation von Membrandynamik und Gebäudeumströmung beginnt, erfolgt zunächst die Bestimmung der Ausgangslage der Membran mit dem 0,32-fachen Wert des Eigengewichts. Anschließend wird die Membran festgehalten und ein anfängliches Strömungsfeld bestimmt, das mit dem vorhergehenden Beispiel zum Zeitpunkt $t = 50$ s übereinstimmt. In der folgenden Simulation des gekoppelten Systems entspricht die erste Periode in etwa noch der reinen Strömungssimulation. Die zweite Periode ist von einsetzenden Membranbewegungen gekennzeichnet, die das Strömungsfeld derart beeinflussen, daß hinter der Gebäudevorderkante Wirbel entstehen. Die Wirbel wandern über das Dach und induzieren verstärkte Membranschwingungen, so daß sich das Systemverhalten infolge Fluid-Struktur-Interaktion grundlegend ändert. Nach wenigen Sekunden gegenseitiger Beeinflussung folgt ein mehr oder weniger periodisches Verhalten mit einer Grundfrequenz von $f \approx 0,80$ Hz,

die deutlich über der Ablösefrequenz der reinen Umströmung liegt. Die Zeitverläufe von vertikaler Membranverschiebung und Strömungsdruck in Dachmitte sowie der vertikalen Geschwindigkeit hinter dem Gebäude sind in den Bildern 6.7, 6.8 und 6.9 dargestellt. Bild 6.10 zeigt Druck- und Geschwindigkeitsfelder für eine Periode.

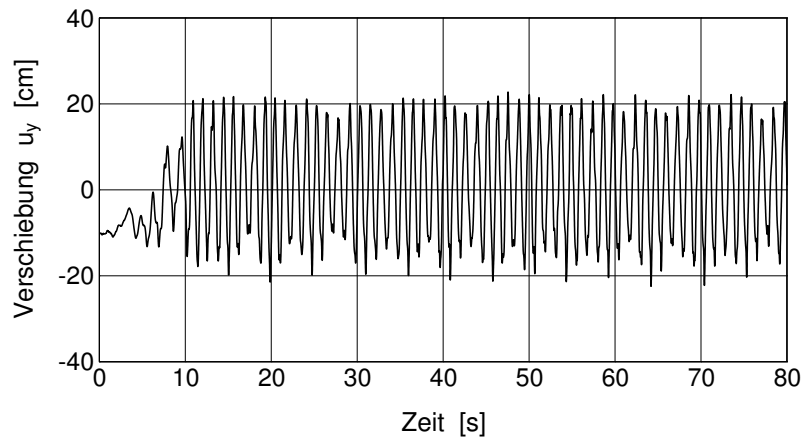


Bild 6.7: Zeitverlauf der vertikalen Membranverschiebung in Dachmitte

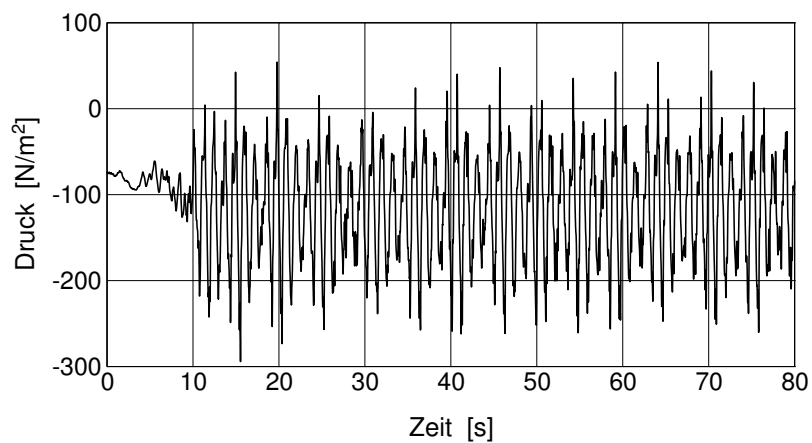


Bild 6.8: Zeitverlauf des Strömungsdrucks in Dachmitte

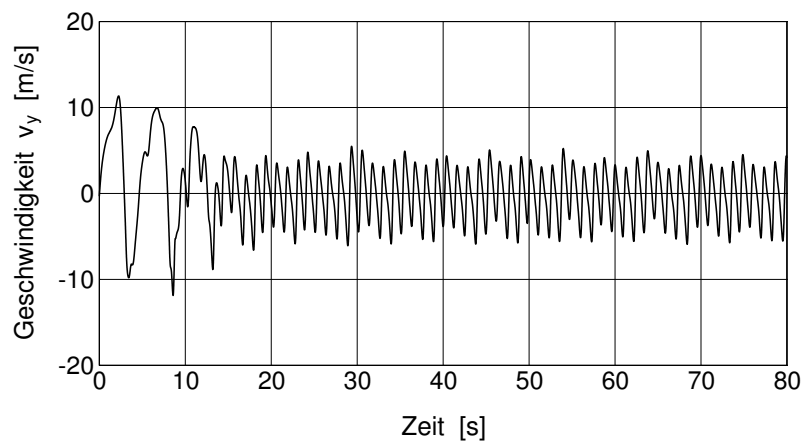


Bild 6.9: Zeitverlauf der vertikalen Geschwindigkeit hinter dem Gebäude

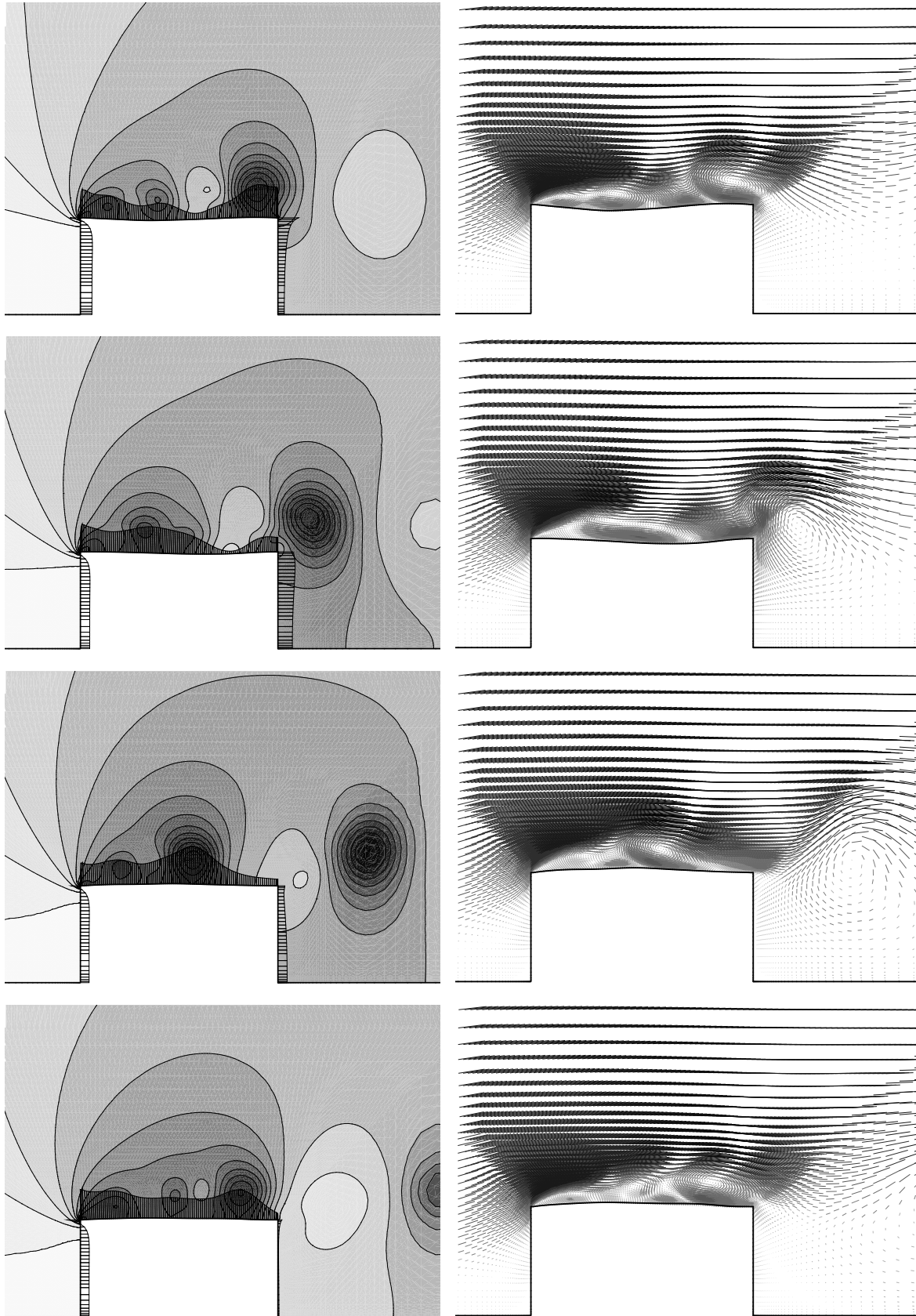


Bild 6.10: Druck- und Geschwindigkeitsfelder bei $t = 66,4$; $66,7$; $67,0$ und $67,4$ s

Bei der Visualisierung der Geschwindigkeitsfelder in Bild 6.10 sind die Membranverformungen 2-fach überhöht dargestellt. Die Membran schwingt mit maximalen Verschiebungsamplituden von $u_y \approx 20\text{cm}$ ungefähr um die horizontale Lage, wobei die nach oben gerichteten Auslenkungen im Mittel etwas größer sind, da die Sogwirkung des mittleren Strömungsdrucks geringfügig über dem Eigengewicht der Membran liegt. Äußere Vorspannkräfte resultieren nur aus der Wirkung des Eigengewichts, womit die Membranspannungen allein aus den aktuellen Verformungen folgen und die Membran in horizontaler Lage spannungsfrei ist. Die Horizontalkraft weist daher extreme Schwankungen auf, was zu einem hochgradig nichtlinearen Schwingungsverhalten mit stark amplitudenabhängigen Frequenzen führt.

Infolge der hochgradig nichtlinearen Kinematik der Membran, deren Steifigkeit beim Durchschlagen fast verschwindet, und des nichtlinearen Strömungsverhaltens bildet sich kein periodisch stationärer Zustand aus. Aber in allen Perioden der gekoppelten Bewegung sind ähnliche Schwingungsformen zu beobachten. Einige Momentaufnahmen der verformten Membran sind 10-fach überhöht in Bild 6.11 zusammengestellt. Die räumlichen Druckschwankungen führen auch zur Anregung von höheren Schwingungsmoden.

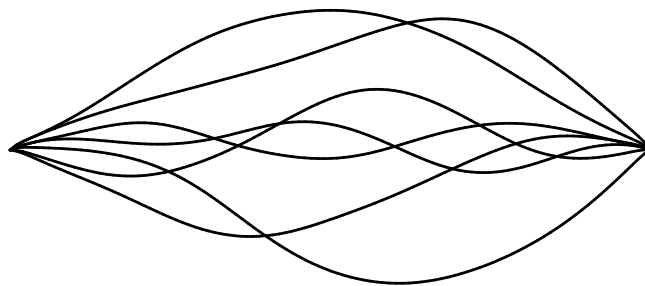


Bild 6.11: Momentaufnahmen der verformten Membran (Verschiebung 10-fach überhöht)

Im Gegensatz zur reinen Gebäudeumströmung, bei der Wirbelablösungen erst an der Gebäudehinterkante mit der vergleichsweise niedrigen Frequenz von $f = 0,21\text{ Hz}$ stattfinden, lösen sich im Fall des gekoppelten Systems Wirbel hinter der Vorderkante ab. Die Wirbel wandern über das Dach, und bewirken Membranschwingungen großer Amplituden, die rückwirkend Wirbelablösungen hervorrufen. Dabei wird die das gekoppelte Systemverhalten beschreibende Frequenz von $f \approx 0,80\text{ Hz}$ in erster Linie von der Membrandynamik bestimmt. Das aus viskoser Umströmung und nichtlinearer Membrandynamik bestehende gekoppelte System zeigt vollkommen anderes Verhalten, als die reine Gebäudeumströmung, womit eine starke Kopplung vorliegt. Genaue Analysen stark gekoppelter Systeme erfordern auch stark gekoppelte oder besser noch simultane Lösungsverfahren. Im vorliegenden Beispiel ist die simultane Lösung des Gesamtsystems auch sehr effizient, da der numerische Aufwand für das gekoppelte System in etwa der reinen Strömungslösung entspricht.

7. Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Weitgespannte Brücken, hohe Masten und leichte Membran- oder Seilkonstruktionen können infolge Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen einstürzen, wenn das gekoppelte dynamische System instabil wird. Die Konstruktion und Bemessung der Tragwerke erfordert nach dem aktuellen Stand der Technik daher aufwendige Windkanaluntersuchungen. Numerische Simulationen der stark gekoppelten Systeme können die Kosten deutlich reduzieren und Entwicklungszeiten verkürzen. Voraussetzung ist die Formulierung und Diskretisierung geeigneter Modellgleichungen für Tragwerksdynamik, Windströmung und Kopplung der Teilsysteme.

Ziel der Arbeit ist die Formulierung eines einheitlichen Modells zur mathematischen Beschreibung der Interaktion von Tragwerksbewegung und Windumströmung sowie die Entwicklung und Anwendung numerischer Methoden zur genauen und effizienten Analyse des Modells. Die simultane Lösung des gekoppelten Systems sichert hohe Konvergenz und Genauigkeit der Gesamtlösung. Grundlage hierfür ist die konsistente Formulierung und Diskretisierung aller Modellgleichungen verbunden mit der Implementierung des gesamten Berechnungsmodells in einem objektorientierten Programmsystem.

Das zweidimensionale Berechnungsmodell besteht aus einem federnd gelagerten Starrkörper oder einer elastischen Struktur, die jeweils von einem instationären Strömungsfeld umgeben sind. Der Starrkörper ist ein Drei-Freiheitsgrad-System mit linearen Feder- und Dämpfungseigenschaften. Die Modellierung elastischer Strukturen erfolgt mit der geometrisch nichtlinearen Elastizitätstheorie in total Lagrange-scher Formulierung und führt auf nichtlineare partielle Differentialgleichungen für Impulsbilanz, Materialgesetz und Kinematik. Der natürliche Wind wird als inkompressibles viskoses Fluid modelliert, da Wirbelablösungen und Grenzschichteffekte die Strömung entscheidend beeinflussen. Zudem treten infolge der hohen Reynolds-Zahlen bei Umströmungen von Bauwerken starke Turbulenzen auf. Die mathematische Beschreibung des Fluids erfolgt daher mit den Reynolds-Gleichungen in Verbindung mit dem k - ω -Turbulenzmodell. Der in einem zeitveränderlichen Gebiet definierte Gleichungssatz besteht aus den Bilanzgleichungen für Masse und Impuls sowie

zusätzlichen Transportgleichungen für die Turbulenzvariablen. Die Kopplungsbedingungen für Geschwindigkeiten und Randspannungen sichern in Verbindung mit der Forderung nach geometrischer Kontinuität zwischen den Feldern die Erhaltung von Masse, Impuls und mechanischer Energie bei der Kopplung von Struktur und Fluid.

Die Anwendung der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode zur numerischen Lösung aller Modellgleichungen führt auf eine konsistente Diskretisierung des Gesamtsystems bei einheitlicher Behandlung von Raum und Zeit. Für die Strömung ermöglicht die Methode eine natürliche Beschreibung des infolge der Strukturbewegung veränderlichen Strömungsgebiets, da sich die räumliche Geometrie der isoparametrischen Raum-Zeit-Elemente im zeitlichen Verlauf ändern kann. Auch erfüllt die Raum-Zeit-Formulierung automatisch das Raumerhaltungsgesetz. Die Verwendung diskontinuierlicher Ansätze in der Zeit führt auf eine implizite, A-stabile Zeitintegration, die bei linearen Ansatzfunktionen von dritter Ordnung genau ist. Die Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente verhindert oszillierende Lösungen der hyperbolischen Differentialgleichungen und liefert auch bei Ansätzen gleicher Ordnung für Druck und Geschwindigkeit stabile Lösungen der Reynolds-Gleichungen. Die gemischt-hybride Geschwindigkeits-Spannungs-Formulierung der Elastodynamik besitzt global nur Geschwindigkeitsvariablen, so daß eine direkte Kopplung mit den Fluidgeschwindigkeiten möglich ist. Die gewichtete Integralformulierung der Kopplungsbedingungen mit Randspannungsvariablen auf dem Interface sichert eine konservative Kopplung der Teilsysteme. Die Zusammenfassung der diskretisierten Modellgleichungen zu einem Gesamtgleichungssystem kann als Ausgangspunkt für mathematische Analysen des gekoppelten Systemverhaltens dienen.

Ausgewählte Anwendungsbeispiele dienen der Verifikation des Berechnungsmodells und zeigen die Leistungsfähigkeit der entwickelten Methodik. Bei der Umströmung elastisch gelagerter Brückenquerschnitte erfolgt anhand numerischer Simulationen die Untersuchung der Phänomenologie von Selbsterregungsmechanismen und die Identifikation von Ursachen für aeroelastische Instabilitäten. Bei infolge Eigengewicht vorgespannten Membrantragwerken führt die Interaktion von Membranbewegung und gleichmäßiger Windanströmung zu Windwirkungen, die das Eigengewicht deutlich übersteigen und Flatterschwingungen großer Amplituden zur Folge haben.

7.2 Ausblick

Das entwickelte Berechnungsmodell ist für zwei und drei Raumdimensionen gültig. Eine Anwendung auf technisch interessante dreidimensionale Aufgabenstellungen führt jedoch zu sehr großen Gleichungssystemen, deren Lösung mit einem Einzel-Prozessor-Rechner momentan nicht möglich ist. Die in den Anwendungsbeispielen

beobachtete numerische Effizienz des simultanen Lösungsverfahrens könnte insbesondere bei sehr aufwendigen 3D-Simulationen ein entscheidender Vorteil sein, so daß eine parallele Implementierung des monolithischen Berechnungsmodells sinnvoll ist. Die Parallelisierung erfordert die Entwicklung neuer, an die gekoppelten Gleichungssysteme angepaßter Vorkonditionierungsalgorithmen für die iterativen Gleichungslöser, wenn die momentan als Vorkonditionierung eingesetzte direkte Zerlegung nicht effektiv auf viele Prozessoren verteilt werden kann.

Die Lösung dreidimensionaler Aufgabenstellungen mit vielen Unbekannten eröffnet die Möglichkeit, das Berechnungsmodell auch für Grobstruktur-Simulationen (LES) turbulenter Strömungen zu verwenden. Denn mit der zu erwartenden Steigerung der Rechenleistung von Hochleistungsrechnern können Grobstruktur-Simulationen in näherer Zukunft auch in der Bauwerksaerodynamik bei realen Reynolds-Zahlen eingesetzt werden und zu neuen Erkenntnissen führen. Und die Turbulenzmodellierung auf Grundlage der Reynolds-Gleichungen liefert z. B. bei hochgradig instationären Strömungsvorgängen, wie sie infolge starker Wechselwirkungen von Fluid und Struktur auftreten können, nur bedingt aussagekräftige Ergebnisse.

Die Anwendung der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode eröffnet Möglichkeiten der adaptiven Netzverfeinerung in Raum und Zeit, so daß sich einerseits die räumliche Diskretisierung an eine zeitveränderliche Lösung anpaßt und andererseits die Genauigkeit der zeitlichen Auflösung im räumlichen Gebiet variiert. Insbesondere bei der Simulation von Wellenausbreitungsphänomenen in elastischen Kontinua bieten sich diskrete Formulierungen mit echter Raum-Zeit-Adaptivität an. Aber auch im Bereich der Strömungsmechanik viskoser Fluide kann die gezielte Netzverfeinerung in Raum und Zeit, z. B. von einzelnen sich im Strömungsgebiet bewegendem Wirbeln, zu deutlichen Einsparungen an Rechenzeit führen. Hierzu erforderlich sind mathematisch fundierte Fehlerindikatoren für die instationären Navier-Stokes-Gleichungen, die den Diskretisierungsfehler in Raum und Zeit zuverlässig abschätzen. Auf diesem Gebiet besteht noch erheblicher Forschungsbedarf, siehe z. B. [8].

Aufbauend auf dem simultanen Lösungsverfahren mit einheitlicher Raum-Zeit-Diskretisierung aller Modellgleichungen und der Formulierung eines Gesamtgleichungssystems sind mathematische Analysen der Stabilitätseigenschaften des gekoppelten Systems nichtlinearer Modellgleichungen möglich. Daneben kann die Anwendung geeigneter Reduktionsverfahren zur Entwicklung vereinfachender Ingenieurmodelle führen, die stark gekoppelte Systeme mit wenigen Freiheitsgraden beschreiben.

Neben dem Anwendungsbereich der Aeroelastik eignet sich das einheitliche Berechnungsmodell zur effizienten Lösung oberflächengekoppelter Systeme in gleicher Weise für ganz andere Aufgabenstellungen mit starker Kopplung von Struktur und Fluid. Beispielhaft genannt sei einerseits das technisch wichtige Gebiet der in

elastischen Behältern schwappenden viskosen Flüssigkeiten. Um freie Oberflächen auch bei Tropfenbildungen, Lufteinschlüssen und brechenden Wellen beschreiben zu können, ist die Erweiterung des Strömungsmodells um eine Volume-of-Fluid-Formulierung (VOF) erforderlich, die vergleichbar mit der Modellierung von Zweiphasenströmungen eine zusätzliche Transportgleichung für die Fluidkonzentration einführt, siehe z. B. [16].

Ein weiteres, stark interdisziplinär ausgerichtetes Anwendungsgebiet ist die Simulation von Blutströmungen in menschlichen Arterien. Da Durchblutungsstörungen der inneren Organe und des Gehirns lebensbedrohliche Folgen haben können, sind genaue Erkenntnisse über die Auswirkungen von krankheitsbedingten Veränderungen der Blutgefäße, z. B. infolge Arteriosklerose, von erheblicher Bedeutung für medizinische Therapien. Die großen Verschiebungen und Verzerrungen, denen die Blutgefäße unterliegen, rufen starke Wechselwirkungen von Blutströmung und Gefäßbewegung hervor. Daneben führen die nichtlinearen Materialeigenschaften des Blutes zu einer nicht-newtonschen Fluidbeschreibung, und über die komplexen hochgradig nichtlinearen Materialeigenschaften der Blutgefäße und deren Modellierung liegen bisher wenig Erkenntnisse vor. Daher erfordern wirklichkeitsnahe Simulationen von Blutströmungen in veränderlichen Gefäßen noch enorme Forschungsleistungen und eine enge Zusammenarbeit mit der Medizin, eröffnen aber gleichzeitig ganz neue therapeutische Möglichkeiten.

Summary

Long-span bridges, high-rise buildings and lightweight membrane or cable structures may collapse due to the interaction of wind flow and structural motion, if the coupled dynamic system becomes unstable. Therefore, a reliable design of such structures demands costly and time-consuming wind tunnel tests. Here, numerical simulations of the strongly coupled system may reduce cost and development time. However, the formulation and discretization of suitable model equations for structural dynamics, wind flow and coupling conditions is required.

Goal of this work is the formulation of a unified mathematical model in order to describe the coupled system behavior as well as the development and application of numerical methods for the efficient and accurate solution of the multi-field problem. A simultaneous solution procedure, which is based on the consistent formulation and discretization of all model equations, ensures high convergence and accuracy of the solution to the fully coupled system. The object-oriented implementation gives the possibility to modify or extend the computational model in a simple way.

The two-dimensional computational model is composed of a spring supported rigid body or an elastic structure, which are situated in an instationary flow field. The rigid body is a three degree of freedom system with linear spring and damping properties, and for the elastic structure a geometrically nonlinear theory and a total Lagrangian description are applied, leading to nonlinear partial differential equations for momentum balance, constitutive law and kinematics. The natural wind is modeled as a viscous incompressible fluid, since vortex shedding and boundary layer phenomena are essential in bluff body aerodynamics. Furthermore, the high Reynolds numbers of wind flow around civil engineering structures cause strong turbulences, which have to be described with turbulence models, since direct numerical simulations are not possible for realistic configurations. Therefore, the Reynolds averaged Navier-Stokes equations in combination with the k - ω turbulence model are applied. The model equations, composed of continuity equation, momentum balance and transport equations for the turbulence variables, are defined on a time dependent spatial domain. The coupling conditions for velocities and boundary tractions in conjunction with the requirement of a continuous geometry ensure the conservation of mass, momentum and mechanical energy between fluid and structure.

The space-time finite element method and a formulation in velocity variables is applied to both continua, leading to a consistent discretization of fluid and structure in space and time. Since the isoparametric space-time elements are adaptable in time direction, the method implies a natural description of the time dependent fluid domain, which has moving boundaries as a result of the structural deformation. In doing so, the method satisfies the geometric conservation law (GCL) automatically, without any additional effort. The time integration, using the time-discontinuous Galerkin method, is implicit, A-stable and for linear interpolations of third order accurate. The Galerkin / least-squares stabilization suppresses numerical oscillations in solutions to elastic wave propagation or convection dominated flow problems, and allows in case of the fluid formulation the application of equal order interpolations for velocity and pressure variables. The mixed-hybrid velocity-stress formulation of elastodynamics, which uses only velocities as global variables, permits a direct coupling with the fluid velocities. Together with the weighted residual formulation of coupling conditions, which introduces boundary tractions as variables, momentum conservation between fluid and structure is guaranteed. A conservative coupling is essential in order to predict correct stability characteristics of coupled systems, which are of major interest, if aeroelastic phenomena are investigated. The discretized model equations for fluid, structure and coupling conditions are formulated in a single equation system. The complete set of equations, which is solved simultaneously, may be a basis for mathematical analyses of the coupled system behavior.

The presented methodology is applied to investigate the interaction of lightweight structures and viscous fluid flow, in order to verify the computational model and to demonstrate efficiency and versatility of the numerical scheme. The simulations provide the opportunity to characterize the phenomenology of coupled systems and to identify reasons for aeroelastic instabilities. A spring-supported H-shaped cross section, which is a simplified version of the original Tacoma Narrows bridge deck, is situated in a laminar flow field. After some vortex shedding periods, the torsional motion of the profile increases exponentially, and the coupled system becomes unstable. In case of a gravity prestressed membrane roof, the interaction of membrane dynamics and viscous fluid flow leads to strongly nonlinear vibrations with high amplitudes and a flow field, which differs completely from the rigid roof case.

Literatur

- [1] J. J. Alonso & A. Jameson: *Fully-implicit time-marching aeroelastic solutions*. AIAA paper 94-0056, 1994.
- [2] J. D. Anderson: *Computational Fluid Dynamics. The Basics with Applications*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- [3] H. Antes: *Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik und Fluidodynamik*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.
- [4] S. N. Atluri: *On hybrid finite element models in solid mechanics*. In R. Vichnevetsky, editor, *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, AICA, Rutgers University, New Brunswick, 1975.
- [5] K.-J. Bathe: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [6] M. Behr & T. E. Tezduyar: *Finite element solution strategies for large-scale flow simulations*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 112, 3–24, 1994.
- [7] O. O. Bendiksen: *A new approach to computational aeroelasticity*. AIAA paper 91-0939, 1991.
- [8] H. Braess: *Untersuchung von Strömungen in zeitlich veränderlichen Gebieten mit der Methode der finiten Elemente*. Dissertation, TU Darmstadt, 2000.
- [9] A. N. Brooks & T. J. R. Hughes: *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 32, 199–259, 1982.
- [10] J. R. Cebral: *Loose Coupling Algorithms for Fluid-Structure Interaction*. PhD thesis, George Mason University, Fairfax, Virginia, 1996.
- [11] DIN 1055 Teil 4: *Lastannahmen für Bauten. Verkehrslasten, Windlasten bei nicht schwingungsanfälligen Bauwerken*. Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 1986.

- [12] D. Dinkler: *Reduction methods in structural dynamics*. In K. Meskouris & U. Wittek, editors, *Aspects in Modern Computational Structural Analysis*. Balkema, Rotterdam, 1997.
- [13] Eurocode 1 Part 2-4: *Basis of design and actions on structures. Actions on structures – Wind actions*. European Committee for Standardization, Brussels, 1995.
- [14] C. Farhat, P. Geuzaine & C. Grandmont: *The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ale schemes for the solution of flow problems on moving grids*. J. Computational Physics 174, 669–694, 2001.
- [15] C. Farhat & M. Lesoinne: *Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 182, 499–515, 2000.
- [16] J. H. Ferziger & M. Perić: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 2002.
- [17] R. Gasch & K. Knothe: *Strukturdynamik. Band 1: Diskrete Systeme. Band 2: Kontinua und ihre Diskretisierung*. Springer, Berlin, 1987 / 1989.
- [18] C. Gerthsen & H. Vogel: *Gerthsen Physik*. Springer, Berlin, 1997.
- [19] T. Grahs & T. Sonar: *Entropy-controlled artificial anisotropic diffusion for the numerical solution of conservation laws based on algorithms from image processing*. J. Visual Commun. Image Represent. 13, 176–194, 2002.
- [20] B. A. Grohmann: *Stabilized Space-Time Finite Elements for Transonic Aeroelasticity*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.
- [21] B. A. Grohmann, R. Dornberger & D. Dinkler: *Time-discontinuous stabilized space-time finite elements for aeroelasticity*. In *Fluid-Structure Interaction, Aeroelasticity, Flow-Induced Vibrations and Noise III*, Vol. 53-3, ASME, 1997.
- [22] P. Hansbo: *The characteristic streamline diffusion method for convection-diffusion problems*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 96, 239–253, 1992.
- [23] P. Hansbo: *The characteristic streamline diffusion method for the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 99, 171–186, 1992.
- [24] P. Hansbo: *Lagrangian incompressible flow computations in tree dimensions by use of space-time finite elements*. Int. J. Numer. Methods Fluids 20, 989–1001, 1995.

- [25] R. Harbord, J. Knippers & M. Gellert: *A mixed hybrid FE formulation for solution of elasto-viscoplastic problems*. Comput. Mechanics 9, 173–184, 1992.
- [26] B. Hübner & D. Dinkler: *Numerische Analyse aeroelastischer Instabilitäten von Brückenquerschnitten*. In U. Peil, Herausgeber, Windeinwirkungen auf Bauwerke. Windtechnologische Gesellschaft, Aachen, 2001.
- [27] B. Hübner, E. Walhorn & D. Dinkler: *Strongly coupled analysis of fluid-structure interaction using space-time finite elements*. In 2nd European Conference on Computational Mechanics, Cracow, 2001.
- [28] R. A. W. M. Henkes: *Application of turbulence models to incompressible boundary layers in aeronautics*. In A. Dervieux, M. Braza & J.-P. Dussauge, editors, Computation and Comparison of Efficient Turbulence Models for Aeronautics – European Research Project ETMA. Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [29] C. Hirsch & E. Shang: *Specification of test case TC3 (flat plate boundary layers)*. In A. Dervieux, M. Braza & J.-P. Dussauge, editors, Computation and Comparison of Efficient Turbulence Models for Aeronautics – European Research Project ETMA. Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [30] C. Hirsch & E. Shang: *Synthesis on test case TC3 of ETMA workshop (flat plate boundary layers)*. In A. Dervieux, M. Braza & J.-P. Dussauge, editors, Computation and Comparison of Efficient Turbulence Models for Aeronautics – European Research Project ETMA. Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [31] T. J. R. Hughes: *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood, 1987.
- [32] T. J. R. Hughes, L. P. Franca & G. M. Hulbert: *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 73, 173–189, 1989.
- [33] T. J. R. Hughes & G. M. Hulbert: *Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 66, 339–363, 1988.
- [34] T. J. R. Hughes & K. Jansen: *Finite element methods in wind engineering*. J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn. 46–47, 297–313, 1993.
- [35] G. M. Hulbert: *Discontinuity-capturing operators for elastodynamics*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 96, 409–426, 1992.
- [36] G. M. Hulbert: *Time finite element methods for structural dynamics*. Int. J. Numer. Methods Engrg. 33, 307–331, 1992.

- [37] C. Johnson: *Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 107, 117–129, 1993.
- [38] W. P. Jones & B. E. Launder: *The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence*. Int. J. Heat Mass Transfer 15, 301–314, 1972.
- [39] V. Kalro & T. E. Tezduyar: *A parallel 3D computational method for fluid-structure interactions in parachute systems*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 321–332, 2000.
- [40] P. S. Klebanoff: *Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient*. NACA Technical Note 3178, 1954.
- [41] J. Knippers: *Eine gemischt-hybride FE Methode für viskoplastische Flächen-tragwerke unter dynamischen Einwirkungen*. Dissertation, TU Berlin, 1993.
- [42] J. Knippers & R. Harbord: *A mixed hybrid FE formulation for solution of elasto-viscoplastic problems. Part II: Dynamic loading conditions and bending problems*. Computational Mechanics 13, 231–240, 1994.
- [43] M. Krafczyk: *Simulation von Strömungen mit Gittergasmethoden*. Dissertation, Universität Dortmund, 1995.
- [44] A. Larsen: *Advances in aeroelastic analyses of suspension and cable-stayed bridges*. In G. Solari, editor, 2nd European & African Conference on Wind Engineering, Genova, 1997.
- [45] A. Larsen & J. H. Walther: *Aeroelastic analysis of bridge girder sections based on discrete vortex simulations*. J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn. 67–68, 253–265, 1997.
- [46] D. Laurence & J.-D. Mattei: *Current state of computational bluff body aerodynamics*. J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn. 49, 23–44, 1993.
- [47] M. Lesoinne & C. Farhat: *Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 134, 71–90, 1996.
- [48] P. Le Tallec & J. Mouro: *Fluid structure interaction with large structural displacements*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 3039–3068, 2001.
- [49] R. Löhner: *Applied Computational Fluid Dynamics Techniques*. John Wiley & Sons, Chichester, 2001.

- [50] R. Löhner, C. Yang, J. Cebral, J. D. Baum, H. Luo, D. Pelessone & C. Charman: *Fluid-structure interaction using a loose coupling algorithm and adaptive unstructured grids*. In M. Hafez & K. Oshima, editors, Computational Fluid Dynamics Review 1995. John Wiley & Sons, Chichester, 1995.
- [51] A. Masud & T. J. R. Hughes: *A space-time Galerkin/least-squares finite element formulation of the Navier-Stokes equations for moving domain problems*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 146, 91–126, 1997.
- [52] D. P. Mok & W. A. Wall: *Partitioned analysis schemes for the transient interaction of incompressible flows and nonlinear flexible structures*. In W. A. Wall, K.-U. Bletzinger & K. Schweizerhof, editors, Trends in Computational Structural Mechanics, CIMNE, Barcelona, 2001.
- [53] S. Murakami: *Overview of turbulence models applied in CWE-1997*. J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn. 74–76, 1–24, 1998.
- [54] S. Murakami, A. Mochida & S. Sakamoto: *CFD analysis of wind-structure interaction for oscillating square cylinders*. J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn. 72, 33–46, 1997.
- [55] C. Petersen: *Dynamik der Baukonstruktionen*. Vieweg, Braunschweig, 1996.
- [56] T. H. H. Pian & P. Tong: *Basis of finite element methods for solid continua*. Int. J. Numer. Methods Engrg. 1, 3–28, 1969.
- [57] S. Piperno: *Numerical simulation of aeroelastic instabilities of elementary bridge decks*. INRIA Technical Report 3549, 1998.
- [58] S. Piperno & C. Farhat: *Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems – part II: Energy transfer analysis and three-dimensional applications*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 3147–3170, 2001.
- [59] E. F. Punch & S. N. Atluri: *Development and testing of stable, invariant, isoparametric curvilinear 2- and 3-d hybrid-stress elements*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 47, 331–356, 1984.
- [60] E. Ramm & W. A. Wall: *Interaction of fluids and thin structures*. In 2nd European Conference on Computational Mechanics, Cracow, 2001.
- [61] E. Reissner: *On a variational theorem in elasticity*. Journal of Mathematics and Physics 29, 90–95, 1950.

- [62] W. Rodi: *Simulation of turbulence in practical flow calculations*. In European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000, CIMNE, Barcelona, 2000.
- [63] R. Rudnik: *Untersuchung der Leistungsfähigkeit von Zweigleichungs-Turbulenzmodellen bei Profilmströmungen*. DLR-Forschungsbericht 97-49, 1997.
- [64] H. Ruscheweyh: *Dynamische Windwirkung an Bauwerken. Band 1: Grundlagen. Band 2: Praktische Anwendungen*. Bauverlag, Wiesbaden, 1982.
- [65] R. H. Scanlan: *Amplitude and turbulence effects on bridge flutter derivatives*. J. Struct. Engrg., ASCE, 123(2), 232–236, 1997.
- [66] G. Schewe & A. Larsen: *Reynolds number effects in the flow around a bluff bridge deck cross section*. J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn. 74–76, 829–838, 1998.
- [67] M. Schäfer & S. Turek: *Benchmark computations of laminar flow around a cylinder*. In E. H. Hirschel, editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II*. Vieweg, Braunschweig, 1996.
- [68] H. Schlichting & K. Gersten: *Grenzschicht-Theorie*. Springer, Berlin, 1997.
- [69] M. Shimura & A. Sekine: *Interaction analysis between structure and fluid flow for wind engineering*. J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn. 46–47, 595–604, 1993.
- [70] E. Simiu & R. H. Scanlan: *Wind Effects on Structures. Fundamentals and Applications to Design*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [71] E. Stein & F.-J. Barthold: *Elastizitätstheorie*. In G. Mehlhorn, Herausgeber, *Der Ingenieurbau – Grundwissen*, Band 4. Ernst & Sohn, Berlin, 1996.
- [72] J. Steindorf: *Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur-Wechselwirkung*. Dissertation, TU Braunschweig, 2002.
- [73] J. Studer & A. Ziegler: *Bodendynamik. Grundlagen, Kennziffern, Probleme*. Springer, Berlin, 1986.
- [74] I. Szabó: *Einführung in die Technische Mechanik*. Springer, Berlin, 1984.
- [75] T. E. Tezduyar, M. Behr & J. Liou: *A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces – The deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 94, 339–351, 1992.

- [76] T. E. Tezduyar, M. Behr & S. Mittal: *A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces – The deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows and flows with drifting cylinders*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 94, 353–371, 1992.
- [77] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray & R. Shih: *Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 95, 221–242, 1992.
- [78] T. E. Tezduyar & Y. Osawa: *Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 411–430, 2000.
- [79] T. Theodorsen: *General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter*. NACA Technical Note 496, 1934.
- [80] E. Truckenbrodt: *Fluidmechanik. Band 1: Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide*. Springer, Berlin, 1996.
- [81] E. Walhorn: *Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen*. Dissertation, TU Braunschweig, 2002.
- [82] W. A. Wall: *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [83] J. H. Walther & A. Larsen: *Two dimensional discrete vortex method for application to bluff body aerodynamics*. J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn. 67–68, 183–193, 1997.
- [84] D. C. Wilcox: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, 1998.
- [85] C.-C. Wu & Y. K. Cheung: *Penalty-equilibrating approach and an innovative formulation of 4-noded hybrid stress elements*. Commun. Numer. Methods Engrg. 12, 707–717, 1996.
- [86] W.-M. Xue, L. A. Karlovitz & S. N. Atluri: *On the existence and stability conditions for mixed-hybrid finite element solutions based on Reissner’s variational principle*. Int. J. Solids Structures 21, No. 1, 97–116, 1985.
- [87] O. C. Zienkiewicz & R. L. Taylor: *The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. Volume 2: Solid Mechanics. Volume 3: Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

Umsonst

*Immer rascher fliegt der Funke,
Jede Dschunke und Spelunke
Wird auf Wissenschaft bereist,
Jede Sonne wird gewogen,
Und in Rechnung wird gezogen,
Was noch sonnenjenseits kreist.*

*Immer höhre Wissenstempel,
Immer richt'ger die Exempel,
Wie Natur es draußen treibt,
Immer klüger und gescheiter,
Und wir kommen doch nicht weiter,
Und das Lebensrätsel bleibt.*

Theodor Fontane

Berichte aus dem Institut für Statik ab 1991

- | | | |
|-----|-------|---|
| Nr. | 91-63 | S. KIELBASSA: Standsicherheit der Tunnelortsbrust bei Vortrieb in wassergesättigtem Ton (1991). |
| Nr. | 91-64 | R. MEYER: Mehraxiales Werkstoffmodell für Beton mit einheitlichem Konzept im Vor- und Nachbruchbereich (1991). |
| Nr. | 91-65 | L. PISARSKY: Zur Berechnung nichtmonoton beanspruchter wassergesättigter Tonböden (1991). |
| Nr. | 91-66 | I. SOLIMAN: Ebene und räumliche Spannungs- und Verformungszustände von zwei nacheinander aufgefahrenen Tunnelröhren (1991). |
| Nr. | 92-67 | K. KREMER: Randelement-Methode für elastisch-plastische Strukturberechnungen im Grundbau und ihre Kopplung mit der Finite-Element-Methode (1992). |
| Nr. | 91-68 | Z. HUANG: Beanspruchungen des Tunnelausbaus bei zeitabhängigem Materialverhalten von Beton und Gebirge (1991). |
| Nr. | 93-69 | G. KRACHT: Erschließung viskoplastischer Stoffmodelle für thermomechanische Strukturanalysen (1993). |
| Nr. | 92-70 | E.-R. TIRPITZ: Elasto-plastische Erweiterung von viskoplastischen Stoffmodellen für Metalle (1992). |
| Nr. | 92-71 | H. BRAASCH: Ein Konzept zur Fortentwicklung und Anwendung viskoplastischer Werkstoffmodelle (1992). |
| Nr. | 93-72 | B. HU: Berechnung des geometrisch und physikalisch nichtlinearen Verhaltens von Flächentragwerken aus Stahl unter hohen Temperaturen (1993). |
| Nr. | 93-73 | C. ZHANG, M. SCHMIDT, G. STAUPENDAHL, U. HEEMANN: Entwicklung eines Stoffansatzes zur Beschreibung des Kompaktionsverhaltens von Salzgrus, GSF-Forschungszentrum für Umwelt und Gesundheit, Institut für Tieflagerung (1993). |
| Nr. | 93-74 | S. MATTHIESEN: Standsicherheitsuntersuchungen für Salzbergwerke mit vertikalen Kammerabbauen (1993). |
| Nr. | 93-75 | Mitarbeiter des Instituts: Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Heinz Duddeck zur Vollendung des 65. Lebensjahres gewidmet (1993). |
| Nr. | 93-76 | G. TRANEL: Stabilitätsnachweis beliebiger Schalen mit dem Konzept der Störenergie (1993). |
| Nr. | 93-77 | J. HUCKFELDT: Thermomechanik hydratisierenden Betons – Theorie, Numerik und Anwendung (1993). |

- | | | |
|-----|---------|---|
| Nr. | 94-78 | U. KOWALSKY: Mikrophysikalisch begründetes Werkstoffmodell zur Berechnung thermomechanisch beanspruchter Konstruktionen (1994). |
| Nr. | 95-79 | N. OBERBECK: Instationärer Wärme-Feuchte-Schadstoff - Transport in Beton, Theorie und Berechnung (1995). |
| Nr. | 95-80 | N. MELEKA: Nonlinear Analysis of Flat Slab Floors (1995). |
| Nr. | 97-81 | H. FLOREN: Strukturanalysen unterirdischer Hohlräume im Salzgebirge mit hybriden Randelement- / Finite-Element-Methoden (1997). |
| Nr. | 96-82 | T. GARTUNG: Berechnung von Asphaltstraßen mit einem einheitlichen rheologischen Konzept einschließlich Schädigung (1996). |
| Nr. | 97-83 | T. STREILEIN: Erfassung formativer Verfestigung in viskoplastischen Stoffmodellen (1997). |
| Nr. | 97-84 | B. GUERICKE: Geomechanische Untersuchungen zur Sicherheitsanalyse von Deponien im Salzgestein (1997). |
| Nr. | 97-85 | U. GLABISCH: Stoffmodell für Grenzzustände im Salzgestein zur Berechnung von Gebirgshohlräumen (1997). |
| Nr. | 97-86 | E. ELARABI: Numerical Analysis of the Swelling Soil Effects on Structures (1997). |
| Nr. | 98-87 | I. SPOHR: Störenergie-Konzept für den elasto-plastischen Beulsicherheitsnachweis beliebig belasteter Zylinderschalen (1998). |
| Nr. | 99-88 | C.-X. HUANG: Berechnung von Temperaturspannungen und Rißbildungen infolge Hydratation in 3D-Betonkonstruktionen (1999). |
| Nr. | 2000-89 | H. PENSKY: Beschreibung von streuendem Materialverhalten und von Schädigung bei inelastischen Werkstoffen (2000). |
| Nr. | 2000-90 | A. STEFFENS: Modellierung von Karbonatisierung und Chloridbindung zur numerischen Analyse der Korrosionsgefährdung der Betonbewehrung (2000). |
| Nr. | 2001-91 | J. EBERS-ERNST: Modellierung des inelastischen Verformungsverhaltens von Siedlungsabfalldeponien (2001). |
| Nr. | 2001-92 | J. HANEL: Modell zur Analyse von gekoppelten Transport- und Stoffabbauprozessen in Deponien (2001). |
| Nr. | 2002-93 | B. WIEDEMANN: Modelle für vorgespannte Membranen mit Faltenbildung (2002). |
| Nr. | 2002-94 | R. TACKE: Feuchte- und Festigkeitsentwicklung hydratisierenden Betons – Modellierung und numerische Analyse (2002). |
| Nr. | 2002-95 | E. WALHORN: Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen (2002). |

Sonderdrucke

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens.

Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998).

Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8.

Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig.

Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig

Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland

Telefon +49 (0)531 / 391-3667, Telefax +49 (0)531 / 391-8116

E-Mail statik@tu-bs.de, Homepage <http://www.statik.tu-bs.de>